

Schnitt zweier Ebenen

eine Ebene ist in **Parameterform** gegeben, die andere Ebene in **Koordinatenform**:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_2: 2x - y - z = 8$$

aus der Ebene E_1 lassen sich 3 Gleichungen ablesen:

$$x = 3 - 2r + 2s \quad y = 3 + r \quad z = -1 + 3r + s$$

Diese 3 Gleichungen werden in die Ebene E_2 eingesetzt.

$$2 \cdot (3 - 2r + 2s) - (3 + r) - (-1 + 3r + s) = 8$$

Klammern auflösen – beachte die Minuszeichen vor den Klammern – alle Vorzeichen in der Klammer drehen sich um!

$$6 - 4r + 4s - 3 - r + 1 - 3r - s = 8 \quad \text{zusammengefasst ergibt sich entweder } r = \frac{3}{8}s - \frac{1}{2}$$

$$\text{oder } s = \frac{8}{3}r + \frac{4}{3}$$

Ich setze r in die Gleichung von E_1 ein (ich könnte ebenso s in E_1 einsetzen).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{8}s - \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die mittlere Klammer wird aufgelöst und entsprechende Terme werden zusammengefasst:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{8}s \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 3-\frac{1}{2} \\ -1-\frac{3}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{-6}{8}+2 \\ \frac{3}{8}+0 \\ \frac{9}{8}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden kann zu $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ verändert werden.

Schnitt zweier Ebenen

beide Ebenen sind in Parameterform gegeben:

Hier lohnt es sich, eine Ebene in die Koordinatenform umzuwandeln und dann das oben angegebene Verfahren zu verwenden.

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in Parameterform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beachte: **die Parameter der Geraden und der Ebene müssen unterschiedlich sein!!!!**

$g = E$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sortiere die Vektoren nach links und die Terme mit den Parametern nach rechts:

$$\begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{beachte: beim Term mit r werden die Vorzeichen der Vektorkomponenten umgedreht.}$$

Sortiere die Terme mit den Parametern so, dass ein günstiger Vektor am Anfang steht (für das Gaußsche Verfahren) und der Richtungsvektor der Geraden am Ende. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

s t r

$$\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array} \quad \left| \cdot(-3) \right| +$$

Bedingt durch die günstige Wahl des Anfangsvektors muss nur noch die 6 zu Null gemacht werden.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -9 & -12 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -9r = -12 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$$

Dieser Wert für r wird in die Geradengleichung eingesetzt und man erhält den Schnittpunktvektor und damit die Koordinaten des Schnittpunktes.

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Somit hat der Schnittpunkt die Koordinaten } S\left(2 \mid \frac{4}{3} \mid 4\right)$$

(Zur **Kontrolle** können noch die Werte für s und t berechnet werden ($s = \frac{1}{6}$ und $t = \frac{2}{3}$).

Setzt man s und t in die Ebenengleichung ein, erhält man ebenfalls den Schnittpunktvektor und damit die Koordinaten des Schnittpunktes. Es muss sich ebenfalls $S\left(2 \mid \frac{4}{3} \mid 4\right)$ ergeben).