Workshops zur VO „Einführung in das mathematische Arbeiten“
im SS 2007

Funktionen

Evelina Erlacher

7. März 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Der Funktionsbegriff

Definition:

1. Eine *Funktion f von der Menge A in die Menge B* ist eine Vorschrift, die jedem Element x der Menge A *genau ein* Element y der Menge B zuordnet.
   Schreibweise: $f: A \to B$
2. Das dem Element x zugeordnete Element y bezeichnen wir mit $f(x)$ und nennen es den *Wert der Funktion f an der Stelle x.*
   Schreibweise: $f(x) = y$
3. Die Menge A wird als *Definitionsbereich von f* bezeichnet und die Menge B als *Zielbereich von f.*

Die ausführlichste und genaueste Darstellung einer Funktion erfolgt durch die Notation

$f \;:\; A \to B$	dieser Teil gibt an, wie die Funktion heißt und was der Definitions- und Zielbereich ist
$f(x) = \ldots$	dieser Teil gibt die Zuordnungsvorschrift an

oder

$f \;:\; A \to B$	dieser Teil gibt an, wie die Funktion heißt und was der Definitions- und Zielbereich ist
$x \mapsto f(x)$	dieser Teil gibt die Zuordnungsvorschrift an

Beispiel: Die Funktion, die jeder Zahl ihr Quadrat zuordnet:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = x^2$$

oder

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto x^2$$

Sei $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$ eine Funktion. Dann gibt es folgende

Sprechweisen:
Ein anderes Wort für Funktion ist auch *Abbildung* (von A nach B).
Der Definitionsbereich wird auch *Definitionsmenge* von f genannt. Man sagt: f ist *auf der Menge A definiert.*
Andere Wörter für den Zielbereich sind *Zielmenge*, *Wertebereich* oder *Wertemenge.*
Achtung: In manchen Büchern werden die Ausdrücke Wertebereich und Wertemenge nur für die Teilmenge jener Elemente von B verwendet, die von der Funktion f mindestens einmal getroffen werden.

Das x steht für ein *beliebiges* Element der Menge A (statt x ist natürlich auch jeder andere Buchstabe möglich). Man nennt es *Variable* oder *unabhängige Variable* oder *Veränderliche* oder *Eingabe-Wert* oder *Argument.* Ein konkreter Wert der Variable wird auch als *Stelle* bezeichnet.
Da der Buchstabe x für eine Variable sehr beliebt und weit verbreitet ist, wird die Variable oft auch als *x-Wert* bezeichnet.

Das dem Element $x \in A$ zugeordnete Element $f(x) \in B$ wird *Funktionswert* oder *Funktionswert an der Stelle x* genannt. Manchmal wird auch ein eigenes Symbol für die möglichen Funktionswerte verwendet — sehr beliebt ist der Buchstabe y (also $f(x) = y$). Daher wird der Funktionswert oft auch als *y-Wert* bezeichnet.
Die Zuordnungsvorschrift legt fest, welcher y-Wert aus einem gegebenen x-Wert entsteht. Die Größe y wird daher auch (von x) *abhängige Variable* oder *abhängige Größe* genannt. Man sagt: *y hängt von x ab.*

Weitere Sprechweisen:
Jedes Element von A wird (von der Funktion f) auf ein Element von B *abgebildet.*
f ist eine *Funktion in x.*
y wird von der Funktion f *getroffen.*
Elemente von A werden in die Funktion f *eingesetzt.*
Wo hat die durch $f(x) = x^2$ definierte Funktion den *Wert* 4? Antwort: An den *Stellen* -2 und 2. („Wo?“ bedeutet also immer „an welcher Stelle?“).
Die Funktion *wirkt* auf die Elemente von A, sie wird auf diese *angewandt* (*angewendet*).
Der Größe x wird (von der Funktion f) die Größe y *zugeordnet.*
x wird (von der Funktion f) auf y *abgebildet.*
Die Funktion $f(x) = x^2$, *ausgewertet an der Stelle* 2, hat den Wert 4. Oder: Wird 2 in die Funktion $f(x) = x^2$ eingesetzt, so erhält man den Wert 4. Schreibe: $f(2) = 4$.

2 Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen

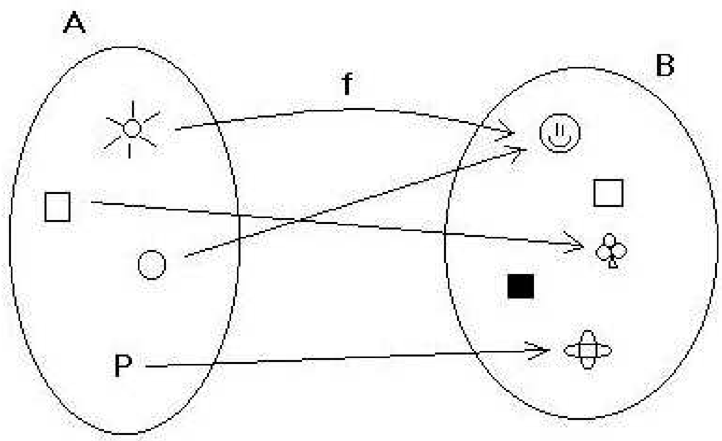
1. Die Funktion f kann durch einen *Term* gegeben sein, also z.B. $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Achtung: Wenn die Definitionsmenge nicht extra angegeben ist, muss man sich selbst überlegen, für welche x-Werte der Term überhaupt ausgewertet werden kann. In unserem Beispiel besteht die Definitionsmenge D aus den reellen Zahlen ohne 1, also $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. Eine Funktion kann in Form einer *Wertetabelle* dargestellt werden. Zum Beispiel:

Landeshauptstadt	Tageshöchsttemperatur vom 5.10.2006
Bregenz	14°
Eisenstadt	16°
Graz	17°
Innsbruck	15°
Klagenfurt	17°
Linz	16°
Salzburg	15°
St. Pölten	18°
Wien	17°

3. Ein *Mengendiagramm* einer Funktion sieht zum Beispiel so aus:



4. Eine Funktion f kann auch durch einen *Graphen* in der Zeichenebene dargestellt werden. Jeder Punkt des Graphen besitzt zwei Koordinaten. Die erste Koordinate entspricht einem Wert x aus dem Definitionsbereich, die zweite Koordinate gibt den Funktionswert $f(x)$ an. Der Graph einer Funktion kann aus nur endlich vielen Punkten bestehen (das wäre z.B. der Fall, wenn wir obige Tageshöchsttemperatur-Wertetabelle graphisch darstellen) oder auch eine Kurve sein.

   Achtung: Nicht jede beliebige Kurve in der Ebene stellt eine Funktion dar. Nur wenn jede Parallele zur y-Achse die Kurve höchstens einmal schneidet handelt es sich um den Graphen einer Funktion.

3 Einige Typen von Funktionen

Im Folgenden bezeichne D immer eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = kx + d$ (für $k, d \in \mathbb{R}$) heißt *lineare Funktion.*

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$) heißt *Polynomfunktion*.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ (für $p(x), q(x)$ Polynome) heißt *rationale Funktion*. Ihre Definitionsmenge D besteht aus den reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Polynoms $q(x)$.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = x^r$ (für $r \in \mathbb{Z}$) heißt *Potenzfunktion*.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$ (für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) heißt *Wurzelfunktion*.

Definition: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = a^x$ (für $a \in \mathbb{R}^+$) heißt *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Definition: Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = {}^a\!\log x$ (für $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$) heißt *Logarithmusfunktion* zur Basis a.

Außerdem kennen wir noch die *Winkelfunktionen* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

Eine weitere wichtige Funktion ist die *Betragsfunktion*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = |x|$.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

1. $y = \frac{1}{2}x - 3$
2. $y = x^3 - 4x$
3. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$
4. $y = x^0$, $y = x^1$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$
5. $y = \sqrt{x}$
6. $y = e^x$
7. $y = \ln x$
8. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$
9. $y = |x|$

4 Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln von Funktionen *oder:* Wir basteln mit Funktionen

Nehmen wir an, wir haben die Eigenschaften einer Funktion f anhand ihres Graphen studiert und kennen sie jetzt recht gut. Dann bekommen wir eine andere Funktion g vorgesetzt, die durch $g(x) = -3 \cdot f(x + 2)$ definiert ist. Können wir auf Anhieb sagen, wie der Graph von g aussieht?

Die Antwort auf diese Frage geben die folgenden Beobachtungen:

Der Graph der Funktion $f(x) + d$ geht aus jenem von f hervor durch *Verschiebung um d in y-Richtung* ($d \in \mathbb{R}$).

Der Graph der Funktion $f(x-d)$ geht aus jenem von f hervor durch *Verschiebung um d in x-Richtung* $(d \in \mathbb{R})$.

Der Graph der Funktion $k \cdot f(x)$ geht aus jenem von f hervor durch *Streckung um den Faktor k in y-Richtung* $(k \in \mathbb{R}^+)$.

Der Graph der Funktion $f(\frac{x}{k})$ geht aus jenem von f hervor durch *Streckung um den Faktor k in x-Richtung* $(k \in \mathbb{R}^+)$.

Der Graph der Funktion $-f(x)$ geht aus jenem von f hervor durch *Spiegelung an der x-Achse.*

Der Graph der Funktion $f(-x)$ geht aus jenem von f hervor durch *Spiegelung an der y-Achse.*

Den Graphen der Funktion $|f(x)|$ erhält man indem man die Punkte des Graphen von f mit negativer y-Koordinate an der x-Achse spiegelt.

Den Graphen der Funktion $-|f(x)|$ erhält man indem man die Punkte des Graphen von f mit positiver y-Koordinate an der x-Achse spiegelt.

Aufgabe: Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

1. $y = (x+1)^2 - 2$
2. $y = -\sqrt{x-1}$
3. $y = \frac{x}{x-1}$
4. $y = 2 \cdot ((1-x)^3 - 4(1-x))$
5. $y = -e^{-x}$
6. $y = 2 \cdot \cos(\frac{x}{2})$

5 Eigenschaften von Funktionen

5.1 Injektiv, surjektiv und bijektiv

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- *injektiv*, wenn jedes Element der Menge B höchstens einmal getroffen wird, d.h. wenn zwei verschiedene x-Werte immer auch verschiedene Funktionswerte haben (in Formeln: wenn aus $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist).
- *surjektiv*, wenn jedes Element von B getroffen wird, d.h. wenn der Zielbereich gleich der ganzen Menge B ist.
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall definiert sie eine exakte Entsprechung („Eins-zu-eins-Zuordnung“) zwischen Elementen der Menge A und Elementen der Menge B. Die Zuordnungsvorschrift kann dann „umgedreht“ werden und definiert die sogenannte *inverse Funktion* (*Umkehrfunktion* oder einfach *Inverse*) $f^{-1} : B \to A$. Eine bijektive Funktion wird daher auch als *invertierbar* (*umkehrbar*) bezeichnet.

Ist eine Funktion $f : A \to B$ injektiv, so kann sie leicht zu einer bijektiven Funktion modifiziert werden, indem die Menge B durch den Wertebereich von f ersetzt, die Wirkung von f aber ansonsten gleichgelassen wird. Insofern „steckt“ in jeder injektiven Funktion eine bijektive.

Sind A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$ und ist $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der ersten Mediane $y = x$.

5.2 Positivität und Negativität, Nullstellen

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x positiv, d.h. $f(x) > 0$, dann hat der entsprechende Punkt des Graphen eine positive y-Koordinate: Der Punkt liegt „oberhalb“ der x-Achse. Ist der Funktionswert negativ, d.h. $f(x) < 0$, so liegt der entsprechende Punkt „unterhalb“ der x-Achse.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und A eine Teilmenge von D. Wir sagen: f ist *auf* A

positiv
bzw. *nicht negativ*
bzw. *negativ*
bzw. *nicht positiv*

wenn gilt:

$$\begin{array}{rl} & f(x) > 0 \text{ für alle Elemente } x \text{ in } A \\ \text{bzw.} & f(x) \geq 0 \text{ für alle Elemente } x \text{ in } A \\ \text{bzw.} & f(x) < 0 \text{ für alle Elemente } x \text{ in } A \\ \text{bzw.} & f(x) \leq 0 \text{ für alle Elemente } x \text{ in } A. \end{array}$$

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in D$. Die Stelle x heißt *Nullstelle* von f, wenn $f(x) = 0$ gilt.

Die Nullstellen einer Funktion sind genau jene Stellen, an denen der Graph die x-Achse schneidet.

5.3 Monotonie, Minima und Maxima

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein Intervall in D. Die Funktion f heißt auf I

monoton wachsend
bzw. *streng monoton wachsend*
bzw. *monoton fallend*
bzw. *streng monoton fallend*

wenn für je zwei *beliebige* Elemente x_1 und x_2 aus I gilt:

$$\begin{array}{rl} & x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\ \text{bzw.} & x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \text{bzw.} & x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \\ \text{bzw.} & x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{array}$$

Anders formuliert: Im Fall einer monoton wachsenden Funktion wird für wachsende x auch der Funktionswert $f(x)$ immer größer oder bleibt wenigstens gleich. Bei streng monoton wachsenden Funktionen ist bei größer werdendem x das Gleichbleiben des Funktionswerts $f(x)$ nicht mehr erlaubt. Analog für monoton fallende und streng monoton fallende Funktionen.

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei I ein Intervall ist. f besitzt in $x \in I$ ein

lokales Maximum
bzw. *striktes lokales Maximum*
bzw. *lokales Minimum*
bzw. *striktes lokales Minimum*

wenn es ein Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ innerhalb von I gibt ($\varepsilon > 0$), so dass

$$\begin{array}{rl} & f(x) \geq f(y) \\ \text{bzw.} & f(x) > f(y) \\ \text{bzw.} & f(x) \leq f(y) \\ \text{bzw.} & f(x) < f(y) \end{array}$$

für alle y aus $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mit $y \neq x$ gilt.

Salopp formuliert: Betrachtet man den Graph einer Funktion, so sind die lokalen Maxima die „Berggipfel" des Graphen und die lokalen Minima die „Talböden".

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x ein Element aus D. Die Funktion f besitzt in x ein

globales Maximum
bzw. *globales Minimum*

wenn

$$\begin{array}{rl} & f(x) \geq f(y) \\ \text{bzw.} & f(x) \leq f(y) \end{array}$$

für alle y aus D gilt.

Das globale Maximum (bzw. Minimum) ist der größte (bzw. kleinste) Wert, der von der Funktion je erreicht wird.

Wenn der Definitionsbereich einer Funktion verändert wird, kann sich auch das globale Maximum und Minimum ändern.

Nicht jede Funktion hat lokale Maxima oder Minima oder ein globales Maximum oder Minimum.

5.4 Periodizität

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit Periode* $p \in \mathbb{R}$, wenn für alle x in D mit $x + p \in D$ gilt:

$$f(x + p) = f(x).$$

Das bedeutet, dass die Funktion f sich regelmäßig wiederholt: Kennt man den Graphen der Funktion f auf einem p langen Stück der x-Achse, so erhält man den kompletten Graphen von f durch wiederholtes „Anstückeln" dieses einen Abschnitts des Graphen.

Die Paradebeispiele periodischer Funktionen sind die Winkelfunktionen: Die Sinus- und die Cosinusfunktion haben beide Periode 2π, die Tangensfunktion hat Periode π.

5.5 Stetigkeit

Definition:

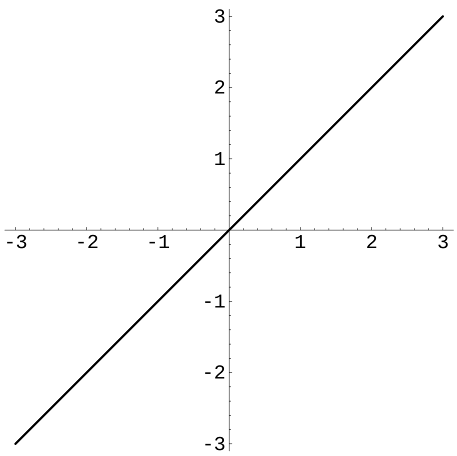
1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x ein Element aus D. Die Funktion f heißt *stetig in* x, wenn für *jede* gegen x konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ (mit $x_n \in D$ für alle n) auch die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$ gegen $f(x)$ konvergiert. Andernfalls heißt sie *unstetig in* x.
2. f heißt *stetig* (auf D), wenn f in jedem x aus D stetig ist.

Zur Erläuterung dieser nicht ganz einfachen Definition ein Text zum Thema Stetigkeit aus dem Artikel „Funktionen 2" auf www.mathe-online.at:

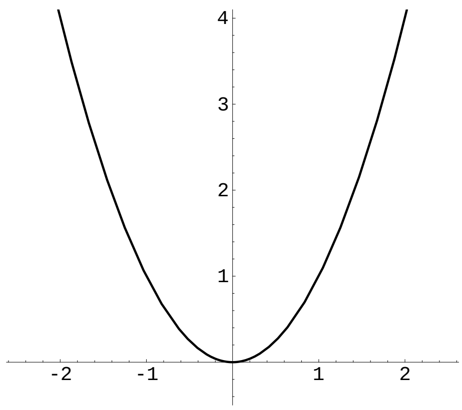
Eine in einem Intervall D definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird als *stetig* bezeichnet, wenn kleine Änderungen von x innerhalb von D kleine Änderungen von $f(x)$ zur Folge haben. Der Graph einer stetigen Funktion ist eine zusammenhängende Kurve (die sozusagen mit dem Bleistift nachgezogen werden kann, ohne ihn abzusetzen). Der Begriff der Stetigkeit macht nur für Intervalle, in denen eine Funktion definiert ist, Sinn. Ist eine Funktion in mehreren Intervallen definiert (wie z.B. $\frac{1}{x}$, was ja für $x = 0$ nicht existiert), so muss jeder dieser Bereiche (für $\frac{1}{x}$ sind das die beiden Intervalle $x < 0$ und $x > 0$) extra betrachtet werden. Eine unstetige Funktion ist dadurch charakterisiert, dass die Forderung nach einem zusammenhängenden Graphen *im Definitionsbereich* nicht erfüllt ist, dass also beispielsweise eine Sprungstelle existiert (an der die Funktion definiert ist, an der der Graph aber „auseinandergerissen“ ist). Eine Funktion, die an voneinander isolierten Stellen unstetig, dazwischen aber stetig ist, heißt *stückweise* (oder *abschnittsweise*) *stetig*. Es gibt aber auch Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und an jeder Stelle unstetig sind.

Eine Funktion, die durch einen Term beschrieben wird, der sich durch die Grundrechnungsarten aus Potenzen, Winkelfunktionen und deren Inversen, Exponentialfunktionen und Logarithmen aufbauen lässt, ist *in ihrem Definitionsbereich* stetig. In diesem Sinn sind termdefinierte Funktionen immer stetig.

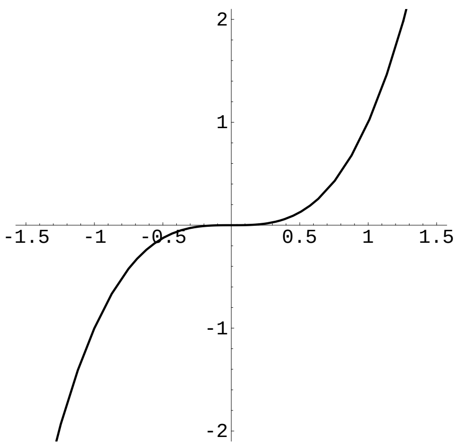
6 Graphen einiger wichtiger Funktionen



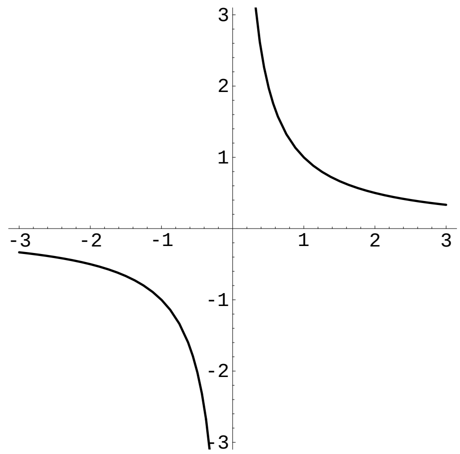
$y = x$



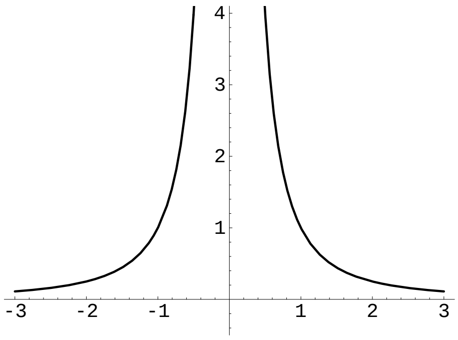
$y = x^2$



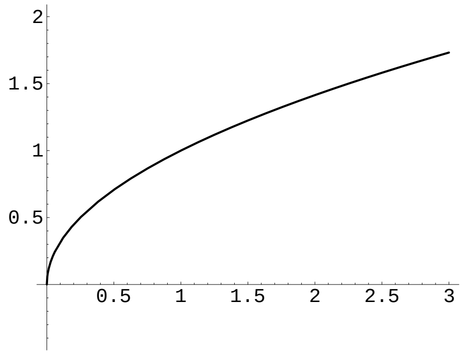
$y = x^3$



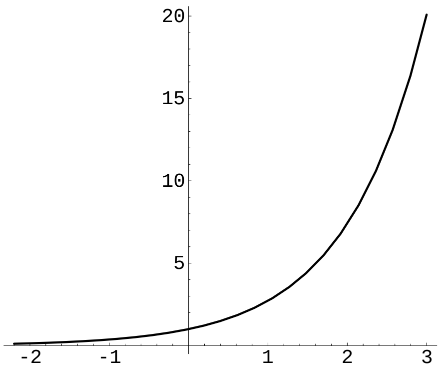
$y = \frac{1}{x}$



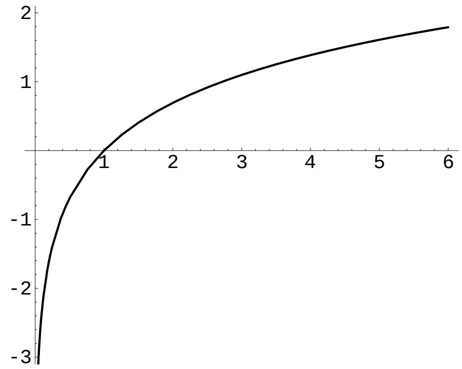
$y = \frac{1}{x^2}$



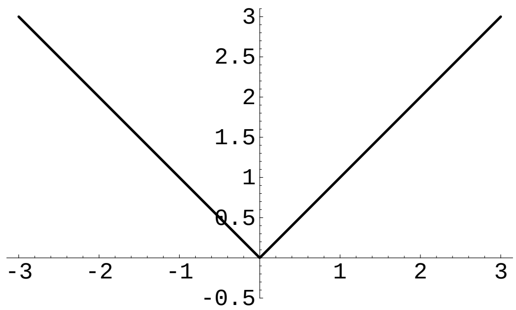
$y = \sqrt{x}$



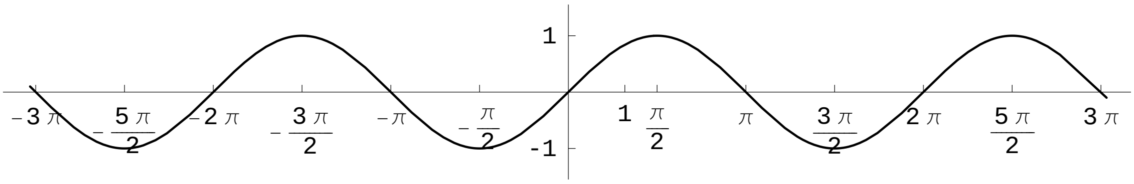
$y = e^x$



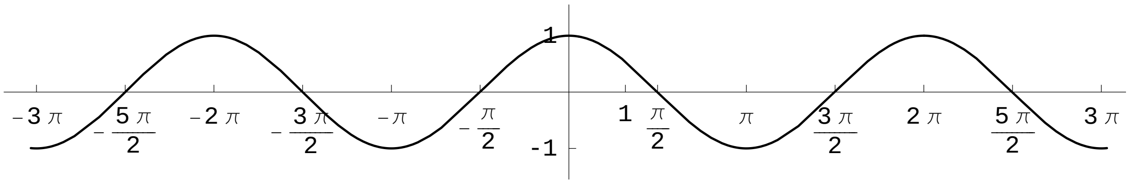
$y = \ln x$



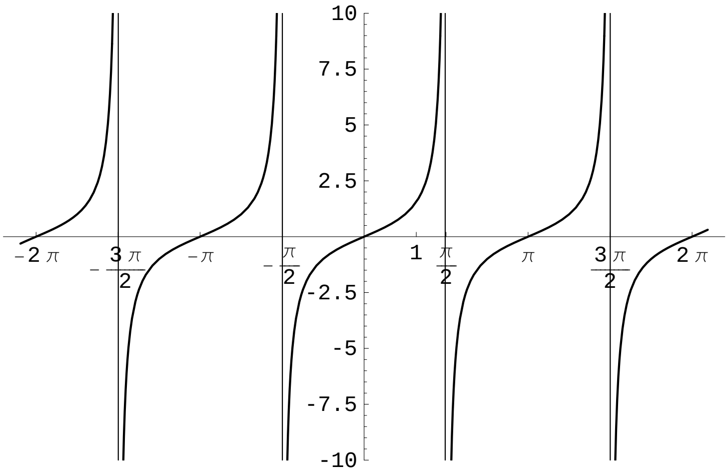
$y = |x|$



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

Literatur

[1] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, *Lehrbuch der Mathematik 5*, öbv & htp, Wien 2002

[2] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, Laub, Josef, Hanisch, Günter, *Lehrbuch der Mathematik 6*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992

[3] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, Hanisch, Günter, Laub, Josef, *Lehrbuch der Mathematik 7*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992

[4] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, Hanisch, Günter, *Lehrbuch der Mathematik 8*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1993

[5] mathe-online, http://www.mathe-online.at (Oktober 2006 & März 2007)