

# Geraden und Ebenen

Handout von Thérèse Tomiska (Oktober 2006)

überarbeitet von Evelina Erlacher

9. & 13. März 2007

## 1 Geradengleichungen ( $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ )

### 1.1 Parameterdarstellung

$$g: X = A + t \cdot \vec{a},$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Geraden,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $g$ ,  
 $\vec{a}$  ... (irgend-)ein Richtungsvektor der Geraden  $g$ ,  
 $t$  ... Parameter.

Jedem Parameterwert entspricht ein Punkt auf der Geraden und umgekehrt. Sind  $P$  und  $Q$  zwei Punkte der Geraden  $g$  so ist  $\overrightarrow{PQ}$  ein Richtungsvektor von  $g$ .

### 1.2 Normalvektorform (nur $\mathbb{R}^2$ )

$$g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A,$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Geraden,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $g$ ,  
 $\vec{n}$  ... (irgend-)ein Normalvektor zu  $g$ .

Führt man für  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  die Skalarmultiplikation aus, so erhält man

$$g: n_x x + n_y y = c,$$

wobei  $c$  eine Konstante (genauer:  $c = \vec{n} \cdot A$ ) ist.

### 1.3 Hesse'sche Normalform (HNF) (nur $\mathbb{R}^2$ )

$$g: \frac{\vec{n} \cdot (X - A)}{|\vec{n}|} = 0,$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Geraden,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $g$ ,  
 $\vec{n}$  ... (irgend-)ein Normalvektor zu  $g$ .

Führt man für  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  die Skalarmultiplikation aus, so erhält man

$$g: \frac{n_x x + n_y y - c}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} = 0,$$

wobei  $c$  eine Konstante (genauer:  $c = \vec{n} \cdot A$ ) ist.

## 2 Ebenengleichungen ( $\mathbb{R}^3$ )

### 2.1 Parameterdarstellung

$$\varepsilon: X = A + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b},$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Ebene,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $\varepsilon$ ,  
 $\vec{a}, \vec{b}$  ... (irgendwelche) Richtungsvektoren der Ebene  $\varepsilon$  ( $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ),  
 $t, s$  ... Parameter.

Jedem Paar von Parameterwerten entspricht ein Punkt auf der Ebene und umgekehrt. Sind  $P, Q$  und  $R$  drei Punkte der Ebene  $\varepsilon$  und liegen  $P, Q$  und  $R$  nicht auf einer Geraden, so sind  $\overrightarrow{PQ}$  und  $\overrightarrow{PR}$  zwei nicht parallele Richtungsvektoren von  $\varepsilon$ .

### 2.2 Normalvektorform

$$\varepsilon: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A,$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Ebene,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $\varepsilon$ ,  
 $\vec{n}$  ... (irgend-)ein Normalvektor zu  $\varepsilon$ .

Führt man für  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  und  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$  die Skalarmultiplikation aus, so erhält man

$$\varepsilon: n_x x + n_y y + n_z z = c,$$

wobei  $c$  eine Konstante (genauer:  $c = \vec{n} \cdot A$ ) ist.

Kennt man von einer Ebene  $\varepsilon$  zwei (nicht parallele) Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , so kann man ihren Normalvektor  $\vec{n}$  mittels Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

### 2.3 Hesse'sche Normalform (HNF)

$$\varepsilon: \frac{\vec{n} \cdot (X - A)}{|\vec{n}|} = 0,$$

wobei  $X$  ... variabler („laufender“) Punkt der Ebene,  
 $A$  ... (irgend-)ein „fester“ Punkt auf  $\varepsilon$ ,  
 $\vec{n}$  ... (irgend-)ein Normalvektor zu  $\varepsilon$ .

Führt man für  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  und  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$  die Skalarmultiplikation aus, so erhält man

$$\varepsilon : \frac{n_x x + n_y y + n_z z - c}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = 0,$$

wobei  $c$  eine Konstante (genauer:  $c = \vec{n} \cdot A$ ) ist.

### 3 Lagebeziehungen

#### 3.1 Lagebeziehungen zweier Geraden ...

##### 3.1.1 ... im $\mathbb{R}^2$

Zwei Geraden  $g$  und  $h$  im  $\mathbb{R}^2$  können folgendermaßen zueinander liegen:

- schneidend,
- parallel,
- ident.

Um zu entscheiden welcher Fall vorliegt kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst überprüft man, ob die Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  parallel sind. Wenn nein, dann schneiden die Geraden einander in einem Punkt, dem sogenannten Schnittpunkt. Wenn ja, überprüft man, ob (ein beliebig ausgewählter) Punkt der Geraden  $g$  auch auf  $h$  liegt. Ist dies der Fall, dann sind die Geraden ident. Ist dies nicht der Fall, dann sind sie parallel.

Eine weitere Vorgehensweise im  $\mathbb{R}^2$  (und nur hier!) ist die folgende: Wegen des Zusammenhangs zwischen Geraden und linearen Gleichungen mit zwei Variablen (vergleiche die „ausmultiplizierte“ Variante der Normalvektorform der Geradengleichung in Abschnitt 1.2) kann man folgenden Zusammenhang zwischen den Lagebeziehungen zweier Geraden und der Lösungsmenge  $L$  des  $2 \times 2$  linearen Gleichungssystems erkennen: Ein System von zwei linearen Gleichungen und zwei Variablen

$$\begin{aligned} g : a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ h : a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

besitzt (für  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  und Grundmenge  $\mathbb{R}^2$ ) folgende Lösungsfälle:

- $L$  ist die leere Menge, d.h. es gibt keine Punkte, die beiden Geraden gemeinsam sind. Die Geraden sind parallel.
- $L$  ist einelementig, d.h. es gibt genau einen Punkt  $S$ , der beiden Geraden angehört. Die Geraden schneiden einander also im Schnittpunkt  $S$ .
- $L$  ist einparametrig, d.h. die unendlich vielen Lösungen bilden eine Gerade, die mit  $g$  und  $h$  übereinstimmt. Die Geraden sind ident.

##### 3.1.2 ... im $\mathbb{R}^3$

Zu den in Abschnitt 3.1.1 genannten möglichen Lagebeziehungen der Geraden  $g$  und  $h$  im  $\mathbb{R}^2$  kommt im  $\mathbb{R}^3$  noch eine weitere hinzu:

- windschief (= kreuzend).

Dies ist dann der Fall, wenn  $g$  und  $h$  keine parallelen Richtungsvektoren besitzen und einander auch nicht schneiden.

### 3.2 Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene ( $\mathbb{R}^3$ )

Eine Gerade  $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$  und eine Ebene  $\varepsilon : ax + by + cz = d$  können folgendermaßen zueinander liegen:

- $g$  schneidet  $\varepsilon$ ,
- $g$  liegt parallel zu  $\varepsilon$ ,
- $g$  liegt in  $\varepsilon$ .

Um zu entscheiden welcher Fall vorliegt kann man folgendermaßen vorgehen: Die Lösungen der Gleichung

$$a(x_A + t \cdot x_a) + b(y_A + t \cdot y_a) + c(z_A + t \cdot z_a) = d$$

sind alle Parameterwerte  $t$ , durch die jene Punkte der Geraden  $g$  festgelegt sind, die auch auf  $\varepsilon$  liegen. Daher gilt: Besitzt obige Gleichung

- genau eine Lösung, so existiert genau ein gemeinsamer Punkt, der Schnittpunkt  $S$ .
- keine Lösung, so ist  $g$  zu  $\varepsilon$  parallel.
- unendlich viele Lösungen, so liegt  $g$  in  $\varepsilon$ .

### 3.3 Lagebeziehungen zweier Ebenen ( $\mathbb{R}^3$ )

Zwei Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  können folgendermaßen zueinander liegen:

- schneidend,
- parallel,
- ident.

Um zu entscheiden welcher Fall vorliegt kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst überprüft man, ob die Normalvektoren von  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  parallel sind. Wenn nein, dann schneiden die Ebenen einander in einer Geraden, der sogenannten Schnittgeraden. Wenn ja, überprüft man, ob (ein beliebig ausgewählter) Punkt der Ebene  $\varepsilon_1$  auch auf  $\varepsilon_2$  liegt. Ist dies der Fall, dann sind die Ebenen ident. Ist dies nicht der Fall, dann sind sie parallel.

Eine weitere Vorgehensweise ist die folgende: Wegen des Zusammenhangs zwischen Ebenen und linearen Gleichungen mit drei Variablen (vergleiche die „ausmultiplizierte“ Variante der Normalvektorform der Ebenengleichung in Abschnitt 2.2) kann man folgenden Zusammenhang zwischen den Lagebeziehungen zweier Ebenen und der Lösungsmenge  $L$  des  $2 \times 3$  linearen Gleichungssystems erkennen: Ein System von zwei linearen Gleichungen und drei Variablen

$$\varepsilon_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

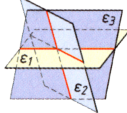
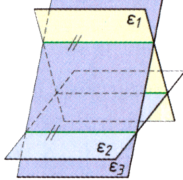
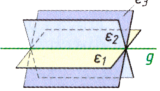
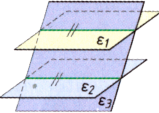
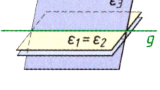
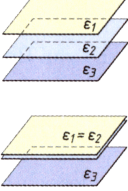
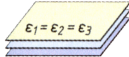
$$\varepsilon_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

besitzt (für  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  und Grundmenge  $\mathbb{R}^3$ ) folgende Lösungsfälle:

- $L$  ist die leere Menge, d.h. es gibt keine Punkte, die beiden Ebenen gemeinsam sind. Die Ebenen sind parallel.
- $L$  ist einparametrig, d.h. die unendlich vielen Lösungen bilden eine Gerade  $g$ , die in beiden Ebenen enthalten ist. Die Ebenen schneiden einander in  $g$ , der sogenannten Schnittgeraden.
- $L$  ist zweiparametrig, d.h. die unendlich vielen Lösungen bilden eine Ebene, die mit  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  übereinstimmt. Die Ebenen sind ident.

### 3.4 Lagebeziehungen dreier Ebenen ( $\mathbb{R}^3$ )

Drei Ebenen  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  können folgendermaßen zueinander liegen:

$L = \{\}$	$L = \{S\}$	$L = g$	$L = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$
			
			
			
			

Wegen des Zusammenhangs zwischen Ebenen und linearen Gleichungen mit drei Variablen (vergleiche die „ausmultiplizierte“ Variante der Normalvektorform der Ebenengleichung in Abschnitt 2.2) kann man folgenden Zusammenhang zwischen den Lagebeziehungen dreier Ebenen und der Lösungsmenge  $L$  des  $3 \times 3$  linearen Gleichungssystems erkennen: Ein System von drei linearen Gleichungen und drei Variablen

$$\varepsilon_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$\varepsilon_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$\varepsilon_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

besitzt (für  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$  und Grundmenge  $\mathbb{R}^3$ ) folgende Lösungsfälle:

- $L$  ist die leere Menge, d.h. es gibt keine Punkte, die allen drei Ebenen gemeinsam sind. Dieser Lösungsfall entspricht einer der Lagebeziehungen in der ersten Spalte der obigen Abbildung.
- $L$  ist einelementig, d.h. es gibt genau einen Punkt  $S$ , der allen drei Ebenen angehört. Dieser Lösungsfall entspricht der Lagebeziehung in der zweiten Spalte der obigen Abbildung.
- $L$  ist einparametrig, d.h. die unendlich vielen Lösungen bilden eine Gerade  $g$ , die in allen drei Ebenen enthalten ist. Dieser Lösungsfall entspricht einer der Lagebeziehungen in der dritten Spalte der obigen Abbildung.
- $L$  ist zweiparametrig, d.h. die unendlich vielen Lösungen bilden eine Ebene, die mit  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  ident ist. Dieser Lösungsfall entspricht der Lagebeziehung in der vierten Spalte der obigen Abbildung.

## 4 Winkelberechnungen ( $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ )

### 4.1 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel  $\varphi$  zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kann mittels der Formel

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

berechnet werden. Wir schreiben für  $\varphi$  auch  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ .

### 4.2 Winkel zwischen zwei Geraden

Zwei (schneidende) Geraden  $g : X = A + t \cdot \vec{a}$  und  $h : X = B + s \cdot \vec{b}$  schließen zwei Winkel  $\varphi$  und  $\varphi'$  ein, deren Summe  $180^\circ$  ist. Der kleinere Winkel wird als der Winkel  $\sphericalangle(g, h)$  zwischen  $g$  und  $h$  bezeichnet. Er entspricht dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  der Geraden (falls  $0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 90^\circ$ ) bzw.  $180^\circ$  minus dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  der Geraden (falls  $90^\circ < \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) < 180^\circ$ ). In Formeln:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(g, h) &= \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{falls } 0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 90^\circ, \\ \sphericalangle(g, h) &= 180^\circ - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{falls } 90^\circ < \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) < 180^\circ. \end{aligned}$$

Im  $\mathbb{R}^2$  können zur Berechnung von  $\sphericalangle(g, h)$  auch zwei Normalvektoren  $\vec{n}_1$  von  $g$  und  $\vec{n}_2$  von  $h$  verwendet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(g, h) &= \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{falls } 0 \leq \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq 90^\circ, \\ \sphericalangle(g, h) &= 180^\circ - \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{falls } 90^\circ < \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < 180^\circ, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \sphericalangle(g, h) &= 90^\circ - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}_2), & \text{falls } 0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}_2) \leq 90^\circ, \\ \sphericalangle(g, h) &= \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}_2) - 90^\circ, & \text{falls } 90^\circ < \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}_2) < 180^\circ. \end{aligned}$$

### 4.3 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene ( $\mathbb{R}^3$ )

Eine Gerade  $g : X = A + t \cdot \vec{a}$  und eine (die Gerade  $g$  schneidende) Ebene  $\varepsilon : \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot B$  schließen zwei Winkel  $\varphi$  und  $\varphi'$  ein, deren Summe  $180^\circ$  ist. Der kleinere Winkel wird als der Winkel  $\sphericalangle(g, \varepsilon)$  zwischen  $g$  und  $\varepsilon$  bezeichnet. Man berechnet  $\sphericalangle(g, \varepsilon)$  nach folgender Formel:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(g, \varepsilon) &= 90^\circ - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}), & \text{falls } 0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}) \leq 90^\circ, \\ \sphericalangle(g, \varepsilon) &= \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}) - 90^\circ, & \text{falls } 90^\circ < \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}) < 180^\circ. \end{aligned}$$

### 4.4 Winkel zwischen zwei Ebenen ( $\mathbb{R}^3$ )

Zwei (schneidende) Ebenen  $\varepsilon_1 : \vec{n}_1 \cdot X = \vec{n}_1 \cdot A$  und  $\varepsilon_2 : \vec{n}_2 \cdot X = \vec{n}_2 \cdot B$  schließen zwei Winkel  $\varphi$  und  $\varphi'$  ein, deren Summe  $180^\circ$  ist. Der kleinere Winkel wird als der Winkel  $\sphericalangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  bezeichnet. Er entspricht dem Winkel zwischen den Normalvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  der Ebenen (falls  $0 \leq \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq 90^\circ$ ) bzw.  $180^\circ$  minus dem Winkel zwischen den Normalvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  der Ebenen (falls  $90^\circ < \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < 180^\circ$ ). In Formeln:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{falls } 0 \leq \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leq 90^\circ, \\ \sphericalangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= 180^\circ - \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{falls } 90^\circ < \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < 180^\circ. \end{aligned}$$

## 5 Abstandsberechnungen ( $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ )

### 5.1 Abstand zweier Punkte

Der Abstand  $d(P, Q)$  zweier Punkte  $P$  und  $Q$  entspricht der Länge des Vektors  $\overrightarrow{PQ}$ . In Formeln:

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

### 5.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Um den Abstand  $d(P, g)$  eines Punktes  $P$  von einer Geraden  $g$  zu ermitteln, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

#### 5.2.1 Trigonometrisch

Die Gleichung der Geraden sei  $g : X = A + t \cdot \vec{a}$ . Man bestimmt zuerst den Winkel  $\sphericalangle(\vec{a}, \overrightarrow{AP})$  zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\overrightarrow{AP}$ . Dann gilt:

$$d(P, g) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \overrightarrow{AP}).$$

#### 5.2.2 Mittels Fußpunkt

Die Gleichung der Geraden sei  $g : X = A + t \cdot \vec{a}$ . Die zu  $g$  normale und durch den Punkt  $P$  gehende Gerade  $h$  ( $\mathbb{R}^2$ ) bzw. Ebene  $\varepsilon$  ( $\mathbb{R}^3$ ) ist durch die Gleichung  $h : \vec{a} \cdot X = \vec{a} \cdot P$  bzw.  $\varepsilon : \vec{a} \cdot X = \vec{a} \cdot P$  gegeben. Der Fußpunkt  $F$  ist der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  bzw.  $g$  und  $\varepsilon$ . Der Abstand  $d(P, g)$  von  $P$  zu  $g$  entspricht dann der Länge des Vektors  $\overrightarrow{PF}$ . In Formeln:

$$d(P, g) = |\overrightarrow{PF}|.$$

#### 5.2.3 Mittels HNF (nur $\mathbb{R}^2$ )

Die Gleichung der Geraden sei  $g : \frac{\vec{n} \cdot (X - A)}{|\vec{n}|} = 0$ . Dann gilt:

$$d(P, g) = \frac{|\vec{n} \cdot (P - A)|}{|\vec{n}|} = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|.$$

Diese Formel berechnet gerade die Länge der Normalprojektion  $\overrightarrow{AP}_n$  des Vektors  $\overrightarrow{AP}$  auf den Vektor  $\vec{n}$ .

## 5.3 Abstand eines Punktes von einer Ebene ( $\mathbb{R}^3$ )

Um den Abstand  $d(P, \varepsilon)$  eines Punktes  $P$  von einer Ebene  $\varepsilon$  zu ermitteln, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

#### 5.3.1 Mittels Fußpunkt

Die Gleichung der Ebene sei  $\varepsilon : \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$ . Die zu  $\varepsilon$  normale und durch den Punkt  $P$  gehende Gerade  $g$  ist durch die Gleichung  $g : X = P + t \cdot \vec{n}$  gegeben. Der Fußpunkt  $F$  ist der Schnittpunkt von  $\varepsilon$  und  $g$ . Der Abstand  $d(P, \varepsilon)$  von  $P$  zu  $\varepsilon$  entspricht dann der Länge des Vektors  $\overrightarrow{PF}$ . In Formeln:

$$d(P, \varepsilon) = |\overrightarrow{PF}|.$$

### 5.3.2 Mittels HNF

Die Gleichung der Ebene sei  $\varepsilon : \frac{\vec{n} \cdot (X-A)}{|\vec{n}|} = 0$ . Dann gilt:

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|\vec{n} \cdot (P-A)|}{|\vec{n}|} = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0|.$$

Diese Formel berechnet gerade die Länge der Normalprojektion  $\overrightarrow{AP}_n$  des Vektors  $\overrightarrow{AP}$  auf den Vektor  $\vec{n}$ .

### 5.4 Abstand zweier paralleler Geraden

Es seien  $g$  und  $h$  parallele Geraden und  $P$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $h$ . Der Abstand von  $g$  und  $h$  entspricht dem Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$ . In Formeln:

$$d(g, h) = d(P, g) \quad \text{mit } P \in h.$$

### 5.5 Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene ( $\mathbb{R}^3$ )

Es sei  $g$  eine Gerade,  $\varepsilon : \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$  eine zu  $g$  parallele Ebene und  $P$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $g$ . Der Abstand  $d(g, \varepsilon)$  von  $g$  zu  $\varepsilon$  entspricht dem Abstand des Punktes  $P$  von der Ebene  $\varepsilon$ . Aus Abschnitt 5.3.2 folgt daher

$$d(g, \varepsilon) = d(P, \varepsilon) = |\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}_0| \quad \text{mit } P \in g.$$

Diese Formel berechnet gerade die Länge der Normalprojektion  $\overrightarrow{AP}_n$  des Vektors  $\overrightarrow{AP}$  auf den Vektor  $\vec{n}$ .

### 5.6 Abstand zweier windschiefer Geraden ( $\mathbb{R}^3$ )

Die Gleichungen der Geraden seien  $g : X = A + t \cdot \vec{a}$  und  $h : X = B + s \cdot \vec{b}$ . Der Abstand von  $g$  und  $h$  entspricht dem Abstand der Geraden  $h$  zu jener Ebene  $\varepsilon$ , die die Gerade  $g$  enthält und parallel zu  $h$  ist. Die Gleichung dieser Ebene ist  $\varepsilon : (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot X = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot A$ . Aus Abschnitt 5.5 folgt daher

$$d(g, h) = d(h, \varepsilon) = |\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0|.$$

Diese Formel berechnet gerade die Länge der Normalprojektion  $\overrightarrow{AB}_{a \times b}$  des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  auf den Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

### 5.7 Abstand zweier paralleler Ebenen ( $\mathbb{R}^3$ )

Es seien  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  parallele Ebenen und  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene  $\varepsilon_2$ . Der Abstand von  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  entspricht dem Abstand des Punktes  $P$  von der Ebene  $\varepsilon_1$ . In Formeln:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(P, \varepsilon_1) \quad \text{mit } P \in \varepsilon_2.$$

## Literatur

- [1] GÖTZ, Stefan, REICHEL, Hans-Christian, MÜLLER, Robert, HANISCH, Günter, *Mathematik-Lehrbuch 5*, Verlag öbv & hpt, Wien 2006
- [2] GÖTZ, Stefan, REICHEL, Hans-Christian, MÜLLER, Robert, HANISCH, Günter, *Mathematik-Lehrbuch 6*, Verlag öbv & hpt, Wien 2006