Workshops zur VO „Einführung in das mathematische Arbeiten“
im SS 2007

Die Kugel

Evelina Erlacher

14. März 2007

1 Definition und Gleichung der Kugel

Definition: Die Menge aller Punkte X des Raumes, die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die *Kugel(fläche)* k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r:

$$k[M,r] = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overline{XM} = r\}.$$

Die *Vektorform der Kugelgleichung* lautet

$$(X - M)^2 = r^2,$$

wobei	X	...	variabler („laufender“) Punkt der Kugel,
	M	...	Mittelpunkt,
	r	...	Radius.

Führt man auf der linken Seite für $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ die Skalarmultiplikation aus, so erhält man die *Koordinatenform der Kugelgleichung*:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2.$$

Liegt der Mittelpunkt M im Ursprung, d.h. $M(0|0|0)$, so ist die Kugel in *Hauptlage* und ihre Gleichung lautet:

$$X^2 = r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

2 Lagebeziehungen zwischen Kugel und Gerade

Es sei $k[M,r]$ eine Kugel und g eine Gerade. Die Schnittmenge von k und g hängt vom Abstand d der Geraden g vom Kugelmittelpunkt M ab:

- Ist $d < r$, so schneidet die Gerade g die Kugel k in zwei Punkten, den *Schnittpunkten* S_1 und S_2. Die Gerade ist eine *Sekante* der Kugel.

- Ist $d = r$, so berührt die Gerade g die Kugel k in einem Punkt, dem *Berührpunkt* T. Die Gerade ist eine *Tangente* der Kugel.

- Ist $d > r$, so geht die Gerade g an der Kugel k vorbei. Die Gerade ist eine *Passante* der Kugel.

3 Lagebeziehungen zwischen Kugel und Ebene

Es sei $k[M, r]$ eine Kugel und ε eine Ebene. Die Schnittmenge von k und ε hängt vom Abstand d der Ebene ε vom Kugelmittelpunkt M ab:

- Ist $d < r$, so schneidet die Ebene ε aus der Kugel k einen *Schnittkreis* heraus.
- Ist $d = r$, so berührt die Ebene ε die Kugel k in einem Punkt, dem *Berührpunkt* T; die Ebene ist eine *Tangentialebene*. Die Tangentialebene geht durch den Berührpunkt T und steht auf den Berührradius $\overrightarrow{MT}$ normal; die Normalvektorform der Ebenengleichung von ε lautet daher
$$\varepsilon : \ \overrightarrow{MT} \cdot X = \overrightarrow{MT} \cdot T.$$
- Ist $d > r$, so haben die Ebene ε und die Kugel k keine Punkte gemeinsam.

Literatur

[1] Götz, Stefan, Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, Hanisch, Günter, *Mathematik-Lehrbuch 7*, Verlag öbv & hpt, Wien 2006