Workshops zur VO „Einführung in das mathematische Arbeiten“
im SS 2007

Vektoren

Evelina Erlacher

9. März 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Pfeile und Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Definition: Ein *Pfeil* ist der kürzeste Weg zwischen einem Weg-Anfangspunkt A und einem Weg-Endpunkt E. Dieser kann arithmetisch als geordnetes Zahlenpaar (im $\mathbb{R}^2$) bzw. Zahlentripel (im $\mathbb{R}^3$) dargestellt werden:

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

wobei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Die Pfeilkoordinaten erhält man durch Subtraktion der Koordinaten von $A(a_1|a_2)$ und $E(e_1|e_2)$ bzw. $A(a_1|a_2|a_3)$ und $E(e_1|e_2|e_3)$:

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} e_1 - a_1 \\ e_2 - a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} e_1 - a_1 \\ e_2 - a_2 \\ e_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Leichter merken kann man sich diese Formeln in der Gestalt der

Spitze-minus-Schaft-Regel:

$$\overrightarrow{AE} = E - A.$$

Pfeile sind „ortsgebunden“.

Definition: Ein *Vektor* ist die Menge aller Pfeile, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Auch dieser kann arithmetisch als geordnetes Zahlenpaar (im $\mathbb{R}^2$) bzw. Zahlentripel (im $\mathbb{R}^3$) dargestellt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

wobei $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Geometrisch lässt sich ein Vektor durch (irgend-)einen Pfeil darstellen. Dieser Pfeil heißt *Repräsentant des Vektors.*

Vektoren sind „ortsungebunden“.

Die Darstellung von Vektoren durch Pfeile führt beim „praktischen“ Rechnen oft dazu, dass die Begriffe „Pfeil“ und „Vektor“ mehr oder weniger synonym verwendet werden.

2 Der Betrag eines Vektors

Definition: Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ ist die Länge (irgend-)eines ihn repräsentierenden Pfeiles.

Aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgen die Formeln für den Betrag:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (\text{im } \mathbb{R}^2) \qquad \text{bzw.} \qquad |\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (\text{im } \mathbb{R}^3).$$

3 Die Vektoraddition

Definition: Die *Vektoraddition* wird definiert durch

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (a_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ (a_3 + b_3) \end{pmatrix}.$$

Geometrisch lässt sich die Vektoraddition folgendermaßen deuten: Ein Repräsentant des Vektors $\vec{a} + \vec{b}$ ist der Pfeil vom Anfangspunkt eines Repräsentanten von $\vec{a}$ zum Endpunkt eines Repräsentanten von $\vec{b}$, wobei die Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so gewählt werden, dass der Endpunkt von $\vec{a}$ der Anfangspunkt von $\vec{b}$ ist. Oder kurz: $\vec{a} + \vec{b}$ ist der Vektor, den man durch „Aneinanderhängen“ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält.

Definition: Der Vektor

$$-\vec{b} := \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ (-b_3) \end{pmatrix}$$

heißt *entgegengesetzter Vektor* des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3) \end{pmatrix}$.

Definition: Die *Vektorsubtraktion* definieren wir nun einfach durch die Addition des entgegengesetzten Vektors:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (a_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ (a_3 - b_3) \end{pmatrix}.$$

Definition: Der Vektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (0) \end{pmatrix}$ heißt *Nullvektor*.

Einige Rechenregeln:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz).
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativgesetz).
3. $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$ (Gesetz der Existenz eines neutralen Elements).
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$ (Gesetz der Existenz je eines inversen Elements).

4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar – Parallelität von Vektoren

Definition: Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar v ist durch

$$v \cdot \vec{a} = v \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (a_3) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} va_1 \\ va_2 \\ (va_3) \end{pmatrix}$$

gegeben.

Geometrisch entspricht die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar v dem Verändern der Länge (und bei negativem v auch der Orientierung) des Vektors $\vec{a}$ um den Faktor v.

Einige Rechenregeln:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
2. $v \cdot (w \cdot \vec{a}) = (v \cdot w) \cdot \vec{a}$.
3. $v \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = v \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$.
4. $(v + w) \cdot \vec{a} = v \cdot \vec{a} + w \cdot \vec{a}$.

Außerdem gilt das

Parallelitätskriterium: Zwei Vektoren sind genau dann zueinander parallel, wenn der eine Vektor ein „Vielfaches" des anderen Vektors ist, d.h.

$$\vec{a} || \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{b} = v \cdot \vec{a} \quad \text{für ein } v \in \mathbb{R}.$$

Definition: Der zum Vektor $\vec{a}$ parallele Vektor $\vec{a}_0 := \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ heißt *Einheitsvektor* des Vektors $\vec{a}$. Er hat die Länge 1.

5 Abtragen und Halbieren von Strecken

Das Abtragen einer Strecke der Länge l von einem Punkt A in Richtung des Vektors $\vec{a}$ erfolgt gemäß der Formel

$$B = A + l \cdot \vec{a}_0.$$

Den Halbierungspunkt H_{AB} einer Strecke AB erhält man durch

$$H_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B).$$

6 Orthogonalität und skalares Produkt von Vektoren

Definition: Die Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ (a_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3) \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 \ (+a_3 b_3)$$

heißt *skalares Produkt* oder *Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Es gilt das

Orthogonalitätskriterium: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal (d.h. sie schließen einen rechten Winkel ein), wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, d.h.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ nur eine orthogonale Richtung. Eine Möglichkeit einen zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor zu finden ist, den Vektor $\vec{a}$ um 90° nach links bzw. nach rechts zu kippen. In Koordinaten sieht das so aus:

Links-Kipp-Regel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{\,l} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$,
Rechts-Kipp-Regel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{\,r} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$,

wobei $\vec{a}^{\,l}$ den nach links und $\vec{a}^{\,r}$ den nach rechts gekippten Vektor bezeichnen.

7 Das vektorielle Produkt (nur $\mathbb{R}^3$)

Definition: Der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

heißt das *vektorielle Produkt* oder *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Eigenschaften des vektoriellen Produkts:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$ normal.
2. Der Betrag des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an.

8 Winkel

Aus dem Cosinussatz (angewendet auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$) erhalten wir die

Vektor-Winkel-Formel:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

wobei φ den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ bezeichnet.

Winkelsymmetralen-Regel: Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Richtungsvektoren zweier schneidender Geraden g und h, dann sind die Vektoren $\vec{a}_0 + \vec{b}_0$ und $\vec{a}_0 - \vec{b}_0$ Richtungsvektoren der Winkelsymmetralen von g und h.

9 Die Vektor-Projektions-Formel

Die Normalprojektion $\vec{b}_a$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ ($\neq \vec{o}$) hat die Länge

$$|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cdot |\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{b} \cdot \vec{a}_0|.$$

Der Vektor $\vec{b}_a$ selbst hat die Darstellung

$$\vec{b}_a = \big(|\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\big) \cdot \vec{a}_0 = (\vec{b} \cdot \vec{a}_0) \cdot \vec{a}_0$$

10 Flächen- und Volumsberechnungen

10.1 Formeln im $\mathbb{R}^2$

Parallelogramm: Das von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Dreieck: Das von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Dreieck hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

10.2 Formeln im $\mathbb{R}^3$

Parallelogramm: Das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Dreieck: Das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck hat den Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Prisma: Ein Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe h hat das Volumen

$$V = G \cdot h.$$

Pyramide: Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h hat das Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

Parallelepiped: Das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Parallelepiped hat das Volumen

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Tetraeder: Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Tetraeder hat das Volumen

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

11 Ausblick

Viele der Definitionen in den vorangegangenen Abschnitten können verallgemeinert werden. Statt geordneter Zahlenpaare bzw. Zahlentripel können wir allgemeiner sogenannte n-Tupel betrachten.

Definition: Ein Vektor $\vec{a}$ des $\mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Analog zu den Abschnitten 3, 4 und 6 können wir definieren:

Definition: Die Vektoraddition ist durch

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

gegeben.

Definition: Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $v \in \mathbb{R}$ ist durch

$$v \cdot \vec{a} = v \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \cdot a_1 \\ v \cdot a_2 \\ \vdots \\ v \cdot a_n \end{pmatrix}$$

gegeben.

Definition: Die Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

heißt *skalares Produkt* oder *Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Im $\mathbb{R}^n$ gelten z.B. auch das Parallelitäts- und das Orthogonalitätskriterium.

Das und noch vieles mehr erfahren Sie im Vorlesungszyklus „Lineare Algebra".

Literatur

[1] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, *Lehrbuch der Mathematik 5*, öbv & htp, Wien 2002

[2] Reichel, Hans-Christian, Müller, Robert, Laub, Josef, Hanisch, Günter, *Lehrbuch der Mathematik 6*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992