Lineare Algebra für Dummies

M. Wohlgemuth
$\LaTeX$-Fassung J.Voss

8. Juli 2003

Vorwort

Schon mehrmals wurde hier oder anderswo nach einem Buch mit dem Titel „Lineare Algebra für Dummies“ gefragt.

In der Linearen-Algebra-Vorlesung begegnen Erstsemester der strengen Mathematik gewöhnlich zum ersten Mal. Sie (die Mathematik) gibt sich unzugänglich, bedeutungslos und unanschaulich.

Frage: „Muß das so sein?“
Antwort: „Aber ja, irgendwann und für alles gibt es ein erstes Mal!“
Gegenfrage: „Aha, und wie kann sich jemand jemals daran gewöhnen?“

Wie gewöhnt sich ein Kleinkind daran, daß es nachts durchschlafen muß? Nur durch die deutlich gezeigte und konsequent verfolgte Absicht derjenigen, die ihm die Anerkennung dieser Regel angewöhnen wollen, hier: der Eltern.
Bis es (das Kleinkind) sich in die neuen Regeln eingelebt hat, dauert es bei dem einen 3 Tage, bei einem anderen auch schon mal länger (möglicherweise durch gelegentliche Zeichen von Nachgiebigkeit bei den Eltern ermuntert).

Da es das nachgefragte Buch nicht gibt, sollte man es schreiben. Was muß den drinstehen? Was ist ein Dummie? Sind alle Dummies gleich?

Wohl wissend, daß es vermutlich aussichtlos ist, wage ich einen Beitrag und stelle ihn zur Diskussion.
Das tue ich nicht, weil ich eine neue, bessere Methode für möglich oder zielführender halte, sondern allein zur Motivation für Studenten, die sich - zu Beginn des Studiums - plötzlich mitten in einem unerwarteten Erziehungsprozeß wiederfinden, und getröstet und unterstützt werden wollen.

Immerhin ist der Mensch um die 20 eher als das Kleinkind dazu bereit, sein Handeln und Denken auf ein ferneres Ziel als die nächste Fütterung auszurichten, und auch schwierige Perioden ohne Geschrei zu bewältigen, wenn er sein Ziel kennt und erreichen will.

Das Ziel heißt: *Mathematiker werden.*

Evtl. auch: Physiker/Lehrer/Ingenieur/Informatiker werden. Motivation der Orientierunglosen ist das Ziel meines Versuchs. In der Vorlesung Linere Algebra gibt es viele Orientierungslose.
Auf eine beliebte Brücke von der Schule zur Linearen Algebra an der Universität, nämlich die Vektorgeometrie, werde ich den Leser nicht führen, denn auf

dem neuen Ufer findet man nur mit Mühe etwas vorstellbare Geometrie. Auch wenn es auf dem neuer Ufer ein kleines Dorf gibt, dessen Bewohner in Sprache und Umgangsformen denen auf dem anderen Ufer (dem Schulufer) ähnlich sind, dann ist das eine Ausnahme. (Wer nach Peking reist und dort bei McDonalds ist, der macht nach meiner Auffassung etwas falsch.)
Die Lineare Algebra an der Hochschule ist in ihrer überwiegenden Mehrheit Teil einer andersartigen Gesellschaft, deren Regeln und Formen man sich einfach angewöhnen muß.
Es geht ja nicht um soziokulturelles Untersuchenen („woher kommt das“), sondern um kulturelle Integration („wie werde ich ein Teil davon“).
Wer sich bei der ersten Frage aufhält, und auf sie die Antwort sucht, steht außen. Wer dagegen Assimilation will, der muß mitten hinein.

Erste Regel: Keine Sinnfragen stellen, bevor man sie nicht selbst beantworten kann!
Zweite Regel: Du willst doch Mathematiker werden, oder? Also!
Einwand: „Du sollst mir Mut machen und mich nicht entmutigen!“
Antwort: „Es müßte dich mehr entmutigen, wenn alle sagen, wie leicht es ist, und nur du kannst das nicht finden.“

1 Vektorräume

Die Formel „*Einleitung-Hauptteil-Schluß*“ für eine elementare Gliederung ist uns genauso vertraut und antrainiert wie das rechts-links-rechts als Fußgänger im Straßenverkehr.

In der Mathematik heißt das grundlegende Prinzip: *Definition-Satz-Beweis.* Wie wird das geübt? Selbstverständlich durch Anwendung.

Ähnlich wie jede Aufgabe im Deutschunterricht der Einübung einer Technik dient, und jeder verwendete Text im Rahmen dieser Übung eine Funktion übernimmt, hinter der sein vordergründiger bzw. erkennbarer Inhalt zurücktritt, so ist es auch in der Mathematik. Das meiste diente, meistens und den meisten nur als Vehikel, an dem man üben kann. Mehr zunächst nicht! Später gewinnt einiges für manchen eine Bedeutung aus der Sache heraus, das halte ich aber für Zufall.

Definition 1 *Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V,+,\cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+$ (Addition) und einer Verknüpfung $\cdot$ (Skalarmultiplikation), für die gelten:*

$$\begin{array}{lc}
(V1) & \forall v,w \in V : v+w \in V. \\
(V2) & \forall \lambda \in K, v \in V : \lambda \cdot v \in V. \\
(V3) & (V,+) \textit{ist eine abelsche Gruppe.} \\
(V4) & \forall v,w \in V, \lambda,\mu \in K : \\
 & (\lambda+\mu)v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v) \\
 & \lambda(v+w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w) \\
 & (\lambda\mu)\cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \\
 & 1 \cdot v = v
\end{array}$$

Nach dieser Definition folgen Übungen mit folgendem Lernziel:

Lernen, wie man die in einer Definition genannten Eigenschaften mathematisch einwandfrei nachprüft bzw. widerlegt Anhand von Beispielen.

Beispiele für einen definierten Begriff finden. Etwa: Die Menge der reellen Polynome vom Grad höchstens n ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beispiele finden, die eine Definition nicht erfüllen. Etwa: Die Vereinigung zweier K-Vektorräume ist i.a. kein K-Vektorraum.

Diese Beispiele und die verwendeten Argumentationweisen fest im Kopf verankern. Auf solche Beispiele und Argumentationen wird später zunehmend selbstverständlich zurückgegriffen.

Frage: „Was sind das denn für Beispiele? Wie kommt man jetzt auf Polynome? Und was ist so aufschlußreich an der Vereinigung von Vektorräumen? Wo sind die Zahlen?“

Antwort: „Es sind Beispiele, an denen geübt wird, wie man mit einer Definition umzugehen hat - sogar, wie Mathematik betrieben wird, eine Art Fingerübungen - wie auf dem Klavier: sie haben keinen Komponisten und niemand will sie isoliert oder ständig hören, aber in späteren Spielstücken kommt es einem zugute, wenn man die Grundlagen kennt und es wird erwartet, daß man die einmal erlernten Prinzipien auf andere Fragen übertragen kann.“

Jede Analogie ist angreifbar, und da die Vorlesung nun schon 5 Minuten gedauert hat, muß es weitergehen im Stoff.

Definition 2 *Ein Untervektorraum U eines K-Vektorraums $(V,+,\cdot)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, für die gilt:*

$$\begin{array}{lc} (UV1) & U \neq \emptyset \\ (UV2) & \forall v,w \in U : v+w \in U \\ (UV3) & \forall \lambda \in K, v \in U : \lambda v \in U \end{array}$$

Mathematiker geben allen betrachteten Gegenständen Namen, den Vektorräumen, den Elementen von Körpern, sogar den Regeln selbst. Das dient der Klarheit und Bezugseindeutigkeit aller Aussagen. Die Namensgebung folgt bestimmten Gewohnheiten. Eine dieser Gewohnheiten ist die Verwendung griechischer Buchstaben:

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	O	$\o$	Omikron
X	χ	Chi	Π	π, ϖ	Pi
Δ	δ	Delta	Θ	θ, ϑ	Theta
E	ϵ, ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Φ	ϕ, φ	Phi	Σ	σ, ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	T	τ	Tau
H	η	Eta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Ω	ω	Omega
K	κ	Kappa	Ξ	ξ	Xi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Z	ζ	Zeta

Es hat sein gutes, daß der Körper K nicht etwa V heißt. Allerdings: Ein v ist aus W, wenn gesagt wird, daß $v \in W$. Niemand würde nach dem zweiten Semester ein v für ein Element von V halten - nur wegen des Namens.
Anfänger müssen und sollen lernen, Definitionen genau zu lesen und nichts zu verstehen, was nicht gesagt wurde.

Wer die zuletzt gegebene Definition genau liest, wird feststellen, daß sie bei (UV3) eine Unklarheit enthält Was bedeutet: λv ?
Es ist die Multiplikation gemeint. Ohne nähere Erläuterung wird das Verknüpfungszeichen $\cdot$ weggelassen. Man will ja nicht immer so viel schreiben müssen.

Nun dauert es noch 2 Minuten, und es wird einfach nur von einem Vektorraum V gesprochen, es gibt keine Vektorräume ohne Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, und solange es entweder nicht darauf ankommt, welche konkrete Addition und Multiplikation gemeint sind, oder es aus dem Kontext hervorgeht, welche Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ gemeint sind, schreibt man gern kürzer.

Typische Aufgaben

Zur Systematik: Aufgaben sind je Kapitel numeriert. Die erste Aufgabe im Kapitel 1 hat die Nummer A1.1. Die Lösung zu dieser Aufgabe hat die Nummer L1.1.
Die Lösung Lx.y ist durchweg so knapp formuliert, wie es in der Vorlesung oder Übung normal ist. Kommentierungen zum Verständnis der Aufgabe und der Lösung gebe ich im Abschnitt Kx.y.

A1. 1 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Polynome vom Grad $\leq n$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

L.1 1 *Sei P_n die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq n$. Für Elemente p und q aus P_n ist die Addition $+$ definiert durch: $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, $p + q := \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$. Die Multiplikation $\cdot$ eines Polynoms p mit einer reellen Zahl c ist definiert durch: $c \cdot p := \sum_{i=0}^n (c a_i) x^i$.*

Zu zeigen ist, daß $(P_n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Mit den genannten Definitionen ist klar, daß $p + q$ und $c \cdot p$ Elemente von P_n sind, denn durch beide Operationen erhöht sich der Grad des Polynoms nicht.

$(P_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe, weil die Addition für Polynome auf die Addition der reellen Koeffizenten in den Polynomen p und q zurückgeführt ist und für die reellen Zahlen die verlangte Gruppeneigenschaft bekannt ist.

Die übrigen Axiome rechnet man mit etwas Schreibaufwand, aber ohne Probleme nach. Beispiel: $1p = 1 \cdot \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n (1 \cdot a_i) x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i = p$. Damit ist gezeigt, daß $(P_n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

K.1 1 *Am Anfang jedes Beweises steht eine Aufzählung der Voraussetzungen und es werden Namen für die im Beweis vorkommenden Dinge rekapituliert oder - wenn erforderlich - vergeben („Sei Pn die Menge der Polynome …“). Das hilft dem Leser und es hilft auch beim eigenen Denken. Diesen Anfang kann kann man schreiben, auch wenn man noch nicht weiß, wie es weitergehen wird. Mit dem richtigen Einstieg findet man dann oft den richtigen Weg.*
Die gewählten Namen werden für den Rest des Beweises beibehalten. Namen werden nicht abgekürzt. Niemals P *statt* P_n *schreiben, wenn* P_n *als Name festgelegt ist oder wurde.*
Hängen Dinge von Parametern ab, wie hier von dem n*, dann sollte der Name auch den Parameter enthalten.*

Wesentliche Definitionen und Aussagen, werden im Beweis genannt oder referenziert (in dem Sinne, daß alle wichtigen Werkzeuge sichtbar auf dem Tisch liegen, bevor die Operation beginnt). Die explizite Nennung der Definition für Addition und Multiplikation ist in dieser Aufgabe deshalb notwendig, weil ein Vektorraum ein Tripel bestehend aus einer Menge und zwei Operationen, genannt $+$ *und* $\cdot$ *ist. Man muß sagen, welches die Operationen sind, bzgl. derer* P_n *ein Vektorraum ist.*

Zur genauen Unterscheidung einer definierten Gleichheit von der Gleichheit wird das Zeichen $:=$ *statt des einfachen* $=$ *verwendet. Zumindest am Anfang sollte man das immer auch im Schreiben genau unterscheiden.*

Nach diesen Vorbereitungen folgt der Hauptteil des Beweises. Unter Verwendung der Definitionen für $+$ *und* $\cdot$ *werden die geforderten Eigenschaften nacheinander abgearbeitet. Auch wenn* $p+q$ *bereits nach Definition ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad* $\leq n$ *ist, muß das im Beweis erwähnt werden (sonst denkt noch jemand, dieser Punkt sei vergessen worden). Schreibarbeit gehört dazu (insofern ist der Beweis oben nicht vollständig. Neben* $1 \cdot = p$ *müssen auch alle anderen Axiome nachgerechnet werden!).*
Ein Beweis endet mit einer Formulierung, die das Ende des Beweises anzeigt. Ein Beweis muß keine Beispiele enthalten und sollte es auch nicht. Beispiele hat man sich möglicherweise überlegt, um die Behauptung zu verstehen oder die Beweisidee zu finden. Im Beweis sieht man davon nichts.

P_n *ist die Menge der reellen Polynome vom Grad* $\leq n$*. Im allgemeinen haben zwei verschiedene Polynome aus* P_n *nicht den gleichen Grad. Diese Möglichkeit ist im Beweis eingeschlossen, denn als Koeffizienten* a_i *kommt auch die* 0 *in Frage.*

Warnung*: Die Multiplikation* $\cdot$ *in einem* K*-Vektorraum ist eine sog. äußere Verknüpfung, d.h. Elemente von* V *werden mit Elementen einer anderen Menge (hier* K*) verknüpft. Eine innere Verknüpfung auf* V *ist dagegen eine Verknüpfung von zwei Elementen aus* V*. Die Additiion im Vektorraum ist eine innere Verknüpfung. Man überlege sich bitte, daß die Multiplikation zweier Polynome aus* P_n *im allgemeinen nicht abgeschlossen ist, d.h. das Ergebnis ist* *nicht immer ein Element aus P_n.*

A1. 2 *Wenn $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist, dann ist V nicht leer.*

L.1 2 *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Nach (V3) ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. Nach den Gruppenaxiomen existiert in $(V, +)$ das neutrale Element. Darum ist V nicht leer.*

K.1 2 *Ok?*

Definition 3 *Ein Vektorraum, der nur das neutrale Element der Gruppe $(V, +)$ enthält, heißt Nullvektorraum. Das neutrale Element von $(V, +)$ heißt als Element des Vektorraums angesehen: Nullvektor und wird mit $\mathbf{0}$ bezeichnet.*

Diese $\mathbf{0}$ darf man nicht verwechseln mit der 0 aus K. K ist ein Körper. Ein Beispiel für einen Körper ist $\mathbb{R}$, die Menge der rellen Zahlen. Ein Körper ist eine Menge K mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für die $(K, +)$ eine abelsche Gruppe und $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Jeder Körper hat mindestens zwei Elemente, nämlich das neutrale Element der Addition und das neutrale Element der Multiplikation. Diese werden mit 0 und 1 bezeichnet.
Es gibt einen Körper mit 2 Elementen, man nennt ihn $\mathbb{F}_2$, sprich „F2“.
Verknüpfungstabellen für $\mathbb{F}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_2$ ist außergewöhnlich, weil in ihm $1 + 1 = 0$ gilt. Körper mit dieser Eigenschaft nennt man „Körper der Charakteristik 2“. $\mathbb{F}_2$ begegnet man im Studium oft als Gegenbeispiel oder Ausnahme von der Regel. Immer wenn man etwas für Vektorräume beweisen soll, muß man sich überlegen, ob die Aussage auch für $K = \mathbb{F}_2$ gilt. Falls nicht führt das zu Formulierungen wie „Sei V ein K-Vektorraum und K nicht von der Charakteristik 2, dann gilt ...“.

A1. 3 *In einem K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ gilt $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.*

L.1 3 *Sei $v \in V$. Es ist nach (V4): $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Außerdem ist $0 \cdot v = 0 + 0 \cdot v$. Es folgt $0 \cdot v = 0$.*

K.1 3 *Ja, die 0 steht an verschiedenen Stellen für verschiedene Nullen. Ich schreibe nun 0_V, wenn der Nullvektor gemeint ist und 0_K für die 0 aus K. Dann lautet der Beweis:*
Sei $v \in V$. Es ist nach (V4): $0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v$. Außerdem ist $0 \cdot v = 0_V + 0_K \cdot v$. Es folgt $0_K \cdot v = 0_V$.

Diesen subtilen Beweis muß ich noch weiter erläutern. Der Trick ist, daß ein geeigneter Ausdruck auf zwei verschiedene, erlaubte Weisen dargestellt wird. Die beiden Darstellungen müssen gleich sein ('müssen' als Zwang nicht als Forderung zu verstehen), also $0_V + 0_K \cdot v = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v$. *Wäre* 0_V *ungleich* $0_K \cdot v$, *dann könnte diese Gleichheit nicht gelten.*

A1. 4 *Jeder Unterverktorraum ist ein Vektorraum.*

L.1 4 *Sei* $(V, +, \cdot)$ *ein* K*-Vektorraum und* U *ein Unterverktorraum von* V. *In* U *seien* $+$ *und* $\cdot$ *die durch die Addition und Multiplikation in* V *induzierten Verknüpfungen von Elementen aus* U.
Zeige, daß $(U, +)$ *eine abelsche Gruppe ist.*
Nach (UV2) ist U *abgeschlossen bzgl. der Addition. Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gelten für Elemente aus* U, *weil sie für Elemente aus* V *gelten und* U *Teilmenge von* V *ist. Nach (UV1) ist* U *nicht leer.*
Sei $u \in U$. *Nach (UV3) ist* $0_V = 0_K \cdot u \in U$. 0_V *ist das neutrale Element in* $(V, +)$ *und* U *enthält das neutrale Element.*
Das inverse Element zu $u \in U$ *liegt in* U, *denn nach (UV3) sind* $1 \cdot u$ *und* $(-1) \cdot u$ *in* U. *Nach (UV2) ist dann die Summe* $1 \cdot u + (-1) \cdot u$ *aus* U. u *ist aus* V, *also gilt nach (V3), daß* $1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0_K \cdot u = 0_V$. *Damit ist gezeigt, daß das* $(-1) \cdot u$ *das inverse Element zu u ist, und dieses auch in* U *liegt. Damit ist* $(U, +)$ *eine abelsche Gruppe.*
Die Axiome (V2) gelten für Elemente aus U, *weil sie für Elemente aus* V *gelten.* $(U, +, \cdot)$ *erfüllt die Definition des Vektorraums.*

K.1 4 *Alles klar?!*

Von nun an sollte dem Leser klar sein, um welche Null es sich in welchem Zusammenhang handelt und wir werden die verschiedenen Nullen nicht weiter kennzeichnen.

A1. 5 *Der Nullvektorraum ist Unterverktorraum jedes Vektorraums.*

L.1 5 *Es sind die Bedingungen aus der Definition des Unterverktorraums zu prüfen.*
Der Nullvektorraum ist nicht leer, denn er enthält den Nullvektor. Damit ist (UV1) erfüllt, denn 0, der Nullvektor, ist in jedem Vektorraum V enthalten, weil $(V, +)$ *eine abelsche Gruppe ist.*

Um (UV2) zu zeigen, seien u und v beliebig aus U. *Weil* U *nur den Nullvektor enthält ist (UV2) erfüllt, wenn* $0 + 0 = 0$ *gilt. Diese Eigenschaft ist aber erfüllt, weil* 0 *das neutrale Element aus der abelschen Gruppe* $(V, +)$ *ist.*

Sei $c \in K$ *und* $u \in U$. *Es ist* $u = 0$, *denn andere Elemente enthält* U *nicht. Zeige* $c \cdot 0 \in U$, *d.h.* $c \cdot 0 = 0$. *Für* $c \neq 0$ *folgt:* $c \cdot 0 = c \cdot (0 + 0) = c \cdot 0 + c \cdot 0$.

Außerdem (und andererseits) ist $c \cdot 0 = 0 + c \cdot 0$. *Es erfüllt also sowohl* $c \cdot 0$ *als auch* 0 *die Funktion des neutralen Elements in* $(V, +)$. *Weil das neutrale Element in einer Gruppe eindeutig ist, gilt* $c \cdot 0 = 0$.

K.1 5 ***Frage:*** *Ist die 0 wirklich in jedem Vektorraum enthalten? Handelt es sich denn immer um dieselbe 0?*
Antwort: *Ja, denn der Nullvektorraum ist hier ein Vektorraum* $(\{0\}, +, \cdot)$ *und* $+$ *und* $\cdot$ *sind die Verknüpfungen, die in* V *gelten.*

A1. 6 *Der Durchschnitt von Untervektorräumen eines K-Vektorraums ist ein Untervektorraum.*

L.1 6 *Sei* V *ein* K*-Vektorraum. Seien* $U_1, ..., U_n$ *Untervektorräume von* V. *Der Nullvektorraum ist Untervektorraum jedes Vektorraums (A1.5). Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum (A1.4). Folglich enthalten alle Untervektorräume den Nullvektorraum, und der Nullvektorraum ist darum im Durchschnitt der Untervektorräume enthalten. Folglich ist der Durchschnitt von Untervektorräumen nicht leer und (UV1) ist erfüllt.*

Seien u *und* v *aus dem Schnittmenge der* $U_i, i = 1, ..., n$. *Dann gilt für alle* $i = 1, ..., n$, *daß* $u, v \in U_i$. *Die* U_i *sind Untervektorräume, das bedeutet nach (UV2), daß* $u + v \in U_i$ *(für alle* $i = 1, .., n$*). Da* $u + v$ *in allen* U_i *enthalten ist, ist es auch im Durchschnitt der* U_i *enthalten. (UV2) ist damit erfüllt.*
Mit analoger Argumentation zeigt man (UV3).

K.1 6 *Im Beweis wird die Definition des mengentheoretischen Durchschnitts verwendet. Man scheue sich nicht, die kleinsten Gedankengänge ausführlich zu beschreiben. Nur so zeigt man in der Übung, daß man die Hintergründe wirklich verstanden hat.*

A1. 7 *Die Vereinigung von Untervektorräumen eines* K*-Vektorraums ist i.a. kein Untervektorraum.*

L.1 7 *Sei* $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. *Sei* $U_1 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$.
Sei $U_2 = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}$. *Zeige:* $W := U_1 \cup U_2$ *ist kein Vektorraum, denn die additive Verknüpfung ist im allgemeinen nicht in* W. *Es ist* $u_1 = (1, -1) \in U_1$. *Es ist* $u_2 = (1, 1) \in U_2$. *Die Summe* $u_1 + u_2 = (1, -1) + (1, 1) = (2, 0)$ *ist weder in* U_1 *noch in* U_2. *Nach der Definition der mengentheoretische Vereinigung enthält also* W *das Element* $(2, 0)$ *nicht.* W *ist kein Vektorraum. Wenn* W *kein Vektorraum ist, dann ist* W *auch kein Untervektorraum.*

K.1 7 *Zum Beweis von Nicht-Aussagen genügt schon ein Gegenbeispiel. Es müßte noch gezeigt werden, daß* U_1 *und* U_2 *Untervektorräume sind.*

Alle diese Aufgaben haben das Ziel, daß die definierten Strukturen verstanden werden und mit ihnen sicher umgegangen werden kann. Nicht zuletzt sind diese Aufgaben typisch für die Überlegungen, die man zu Beginn jeder Theorie mit neuen Begriffen anstellt. Die Aufgaben enthalten keine Zahlen, und es wurde nichts ausgerechnet.

In einem Vortrag vor Schülern weist ein Professor auf die Unterschiede zwischen Schule und Studium hin:
„ Nie wird man Ihnen eine derartige Formel vorlegen und Sie bitten Zahlen einzusetzen ...; auch Beispiele werden nur ganz selten vorgerechnet - ich habe es vorhin gemacht, weil Sie das wohl von der Schule her gewöhnt sind ...; von einem Mathematik-Studenten erwartet man, daß er sich selbst Beispiele überlegt, ...“
Aus „Eine Gleichung und viele Ungleichungen“ von C.M. Ringel, Bielefeld.

Definition 4 *Eine geordnete Kollektion von Vektoren $(v_1, v_2, ..., v_k)$ eines K-Vektorraums V heißt Familie von Elementen aus V.*

Ein $v \in V$ heißt Linearkombination einer Familie von Vektoren, wenn es Skalare c_i aus K gibt, die nicht alle gleich 0 sind, so daß $v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + ... + c_k \cdot v_k$.

Eine Familie von Elementen eines K-Vektorraums V heißt linear unabhängig, wenn der Nullvektor keine Linearkombination dieser Familie ist.
Ist eine Familie von Elementen aus V nicht linear unabhängig, dann nennt man sie linear abhängig.

A1. 8 *Finde Beispiele für Familien von Vektoren des Vektorraums $(P_2, +, \cdot)$ die:*

1. *linear unabhängig*
2. *linear abhängig*

sind.

L.1 8 *Die Vektoren $(1, x, x^2)$ sind linear unabhängig, denn aus $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 = 0$ folgt $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.*
$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 = 0$ bedeutet: das Polynom auf der linken Seite der Gleichung ist gleich dem Nullpolynom. Das Nullpolynom ist überall 0, also für alle x. Ein Polynom ist nur dann überall gleich 0, wenn alle seine Koeffizienten gleich 0 sind.

Die Vektoren $(1, x, 2 + 3x)$ sind linear abhängig, denn es ist $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot (2 + 3x) = 0$ erfüllt mit $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = -1$.

K.1 8 *P_n ist schon aus Aufgabe (A1.1) bekannt. Hier geht es nicht darum Nullstellen für Polynome zu finden. Die geforderte Gleichheit soll für alle x aus $\mathbb{R}$ gelten, nicht nur für einige wenige.*

Obwohl die Mathematiker so genau sein wollen, verwenden sie doch ständig gleiche Symbole für verschiedene Dinge. Sie schreiben 0 und meinen mal die 0 aus K, mal den Nullvektor. Auch das $+$ und das $\cdot$ haben nicht notwendig die Bedeutung, die man von den reellen Zahlen kennt. Die folgende Aufgabe soll das verdeutlichen:

A1. 9 *Sei* $V = P(n)$ *die Potenzmenge einer* n*-elementigen Menge. Sei* $K = \mathbb{F}_2$*, der Körper mit 2 Elementen , in dem* $1 + 1 = 0$ *und* $1 \cdot 1 = 1$ *gilt. Definiere für Elemente* u *aus* V *eine Multiplikation durch:* $1 \cdot v = v$ *und* $0 * v = \emptyset$*. Ist* $(P(n), +, \cdot)$ *mit folgenden Additionen ein Vektorraum?*
$u + v := u \cup v$
$u + v := u \cap v$
$u + v := u \cup v - u \cap v$
Falls nein, sage warum?
Falls ja, bestimme alle linear unabhängigen Familien von $(P(n), +, \cdot)$ *für* $n = 3$.

L.1 9 *Probier es einmal selbst. Viel Zeit und ein wenig Suchen gehören schon dazu.*

K.1 9 *Solche Aufgaben sind wohl besonders verhaßt, muß man sich hier nicht nur mit den erwarteten neuen Begriffen herumschlagen, sondern bekommt gleich noch einige dazu (*$\mathbb{F}_2$*). Manchmal sind die Übungen eben eine Erweiterung der Vorlesung. Andererseits: Wer garantiert im späteren Beruf, daß alle Begriffe, auf die man stößt, schon bekannt sind?*

Die erste Hürde ist genommen. Die Begriffe *Vektorraum*, *Unterverktorraum* und *Lineare (Un-)Abhängigkeit* sind uns nun begegnet und erste Aufgaben zu diesen Begriffen konnten nachvollzogen werden.