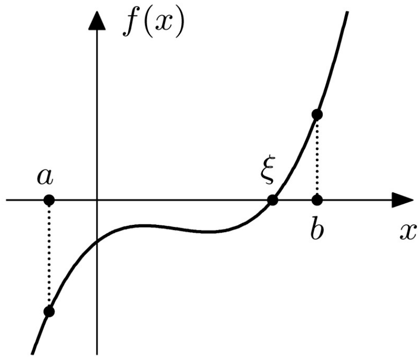
Zwischenwertsatz und Bisektionsverfahren

Nullstellen stetiger Funktionen: Die Abbildung unten zeigt den Graphen einer auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion, die im linken Endpunkt kleiner Null, im rechten größer Null ist. Anschaulich muss der Graph mindestens einmal die x-Achse kreuzen, da er wegen der Stetigkeit keine Sprünge macht. Das heißt also, f muss wenigstens eine Nullstelle in (a, b) haben. Dies ist ein Kriterium, das die Existenz einer Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ garantiert.



Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano): Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0, f(b) > 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis: Der Beweis beruht auf fortgesetzter Halbierung des Intervalls und der Vollständigkeit (Satz unten) der reellen Zahlen. Start: $a_1 = a, b_1 = b$.

Schritt 1: Berechne $y_1 = f(\frac{a_1+b_1}{2})$.

$$\begin{aligned}
&\text{Falls } y_1 > 0: && \text{setze } a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.\\
&\text{Falls } y_1 < 0: && \text{setze } a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, b_2 = b_1.\\
&\text{Falls } y_1 = 0: && \text{Abbruch, } \xi = \frac{a_1 + b_1}{2} \text{ ist Nullstelle.}
\end{aligned}$$

Es ist nunmehr $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$ und die Intervalllänge halbiert:

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1).$$

Schritt 2: Berechne $y_2 = f(\frac{a_2+b_2}{2})$.

$$\begin{aligned}
&\text{Falls } y_2 > 0: && \text{setze } a_3 = a_2, b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}.\\
&\text{Falls } y_2 < 0: && \text{setze } a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}, b_3 = b_2.\\
&\text{Falls } y_2 = 0: && \text{Abbruch, } \xi = \frac{a_2 + b_2}{2} \text{ ist Nullstelle.}
\end{aligned}$$

Weitere Iteration führt zu einer monoton wachsenden, von oben beschränkten Folge

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq b.$$

Nach dem Vollständigkeitssatz (siehe unten) existiert daher

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Andererseits geht $|a_n - b_n| \leq |a-b|/2^{n-1} \to 0$, also ist auch $\lim_{n\to\infty} b_n = \xi$. Falls ξ nicht schon nach endlich vielen Schritten als eines der a_k oder b_k aufgetreten ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0, \\ f(\xi) &= \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0, \end{aligned}$$

woraus sich $f(\xi) = 0$ ergibt, wie behauptet. □

Bemerkung: Der Beweis liefert gleichzeitig ein numerisches Berechnungsverfahren für Nullstellen, das *Bisektionsverfahren.* Es ist zwar langsam konvergent, aber einfach programmierbar und universell einsetzbar - auch für nicht differenzierbare, stetige Funktionen.

Beispiel: Berechnung von $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $f(x) \equiv x^2 - 2 = 0$ im Intervall $[1,2]$ mittels Bisektionsverfahren:

Start:	$f(1) = -1 < 0,\ f(2) = 2 > 0;$	$a_1 = 1,\ b_1 = 2$
Schritt 1:	$f(1.5) = 0.25 > 0;$	$a_2 = 1,\ b_2 = 1.5$
Schritt 2:	$f(1.25) = -0.4375 < 0;$	$a_3 = 1.25,\ b_3 = 1.5$
Schritt 3:	$f(1.375) = -0.109375 < 0;$	$a_4 = 1.375,\ b_4 = 1.5$
Schritt 4:	$f(1.4375) = 0.066406... > 0;$	$a_5 = 1.375,\ b_5 = 1.4375$
Schritt 5:	$f(1.40625) = -0.022461... < 0;$	$a_6 = 1.40625,\ b_6 = 1.4375$
usw.		

Nach 5 Schritten ist somit die erste Nachkommastelle ermittelt:

$$1.40625 < \sqrt{2} < 1.4375.$$

Der Beweis der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen ist im Theorieteil zum Applet *Folgen* zu finden. Zur einfacheren Lektüre fügen wir ihn hier an:

Satz (Vollständigkeit der reellen Zahlen): Jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$).

Beweis: Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, dass sämtliche Glieder der monoton wachsenden, beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiv sind. Wir schreiben die Glieder als Dezimalzahlen

$$a_n = A^{(n)}.\alpha_1^{(n)}\alpha_2^{(n)}\alpha_3^{(n)}\ldots$$

mit $A^{(n)} \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j^{(n)} \in \{0,1,\ldots,9\}$. Es existiert ein $T \geq 0$, sodass für alle n gilt: $a_n \leq T$. Somit ist auch $A^{(n)} \leq T$ für alle n. Die Folge $(A^{(n)})_{n\geq 1}$ ist aber eine monoton wachsende, beschränkte Folge natürlicher Zahlen und muss daher ihre kleinste obere Schranke A letztlich erreichen (und dort bleiben). Es gilt daher ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$A^{(n)} = A \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wir haben damit die Ziffern vor dem Komma für einen Grenzwert a konstruiert:

$$a = A.\ \ldots$$

Sei nun $\alpha_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ die kleinste obere Schranke für $\alpha_1^{(n)}$. Wegen des monotonen Wachstums gibt es wieder ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_1^{(n)} = \alpha_1 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Also ist

$$a = A.\alpha_1 \ldots$$

Sei weiter $\alpha_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ die kleinste obere Schranke für $\alpha_2^{(n)}$. Es gibt $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha_2^{(n)} = \alpha_2 \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

Also ist

$$a = A.\alpha_1\alpha_2 \ldots$$

Sukzessive wird damit eine reelle Zahl

$$a = A.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots$$

definiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir suchen zunächst ein $j \in \mathbb{N}$, sodass $10^{-j} < \varepsilon$ ist. Für $n \geq n_j$ ist

$$a - a_n = 0.000\ldots 0\, \alpha_{j+1}^{(n)}\ \alpha_{j+2}^{(n)} \ldots,$$

da die ersten j Stellen nach dem Komma in a mit jenen von a_n übereinstimmen, sofern $n \geq n_j$ ist. Somit gilt

$$|a - a_n| \leq 10^{-j} < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_j.$$

Mit $n(\varepsilon) = n_j$ wird damit die zur Konvergenz der Folge geforderte Bedingung erfüllt. Falls die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auch negative Glieder besitzt, kann sie durch Addition des Absolutbetrags des ersten Glieds zu einer Folge mit positiven Gliedern $(|a_1| + a_n)_{n\geq 1}$ transformiert werden, auf die dann der erste Teil des Beweises angewendet werden kann. □

Anhang: Zur Definition der Stetigkeit einer reellwertigen Funktion.

Gegeben sei eine Funktion von einem offenen Intervall (a, b) in die reellen Zahlen:

$$f : (a, b) \to \mathbb{R}\,.$$

Wir brauchen den Begriff der *Nullfolge*: Dies ist eine Folge reeller Zahlen $(h_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

Definition:

(a) f besitzt einen *Grenzwert* M in einem Punkt $x \in (a, b)$, falls gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x + h_n) = M$ für alle Nullfolgen $(h_n)_{n\geq 1}$ mit $h_n \neq 0$.

(b) Falls f in $x \in (a, b)$ einen Grenzwert M besitzt, der mit dem Funktionswert übereinstimmt, also $f(x) = M$ ist, so heißt f *stetig im Punkte* x.

(c) Falls f in jedem $x \in (a, b)$ stetig ist, so heißt f *stetig auf dem Intervall* (a, b).

Die Definition der Stetigkeit auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist analog, jedoch mit einseitigen Grenzwerten in den Intervallendpunkten.

Weitere Ausführungen zum Bisektionsverfahren und zum Zwischenwertsatz finden Sie im Abschnitt 6.3 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.