

Integration von Funktionen einer Variablen

1 Das Riemannintegral

Motivation: Wie kann man den Weg w berechnen, den ein Fahrzeug zwischen den Zeitpunkten a und b zurückgelegt hat, wenn man seine Geschwindigkeit $v(t)$ für $a \leq t \leq b$ kennt? Falls $v(t) \equiv v$ konstant ist, einfach zu

$$w = v(b - a).$$

Falls die Geschwindigkeit $v(t)$ zeitabhängig ist, kann man die Zeitachse in kurze Teilintervalle zerlegen: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$.



Wählt man jeweils Zwischenpunkte $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ und ist v eine stetige Funktion der Zeit, so gilt näherungsweise

$$v(t) \approx v(\tau_j) \text{ für } t \in [t_{j-1}, t_j]$$

und zwar umso genauer, je kürzer $[t_{j-1}, t_j]$. Der zurückgelegte Weg im kurzen Zeitintervall ist dann ungefähr gleich

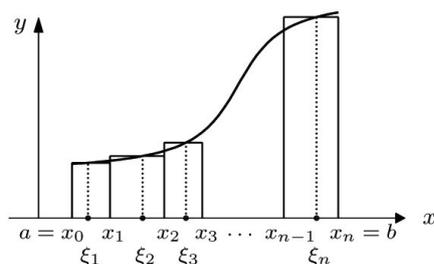
$$w_j \approx v(\tau_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Der Gesamtweg zwischen Zeitpunkt a und Zeitpunkt b ist dann

$$w = \sum_{j=1}^n w_j \approx \sum_{j=1}^n v(\tau_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Lässt man nun die Zeitintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ gegen Null gehen, so sollte im Grenzwert der tatsächliche Wert w für den Weg herauskommen.

In ähnlicher Weise kann man die Fläche unter einem Funktionsgraphen $y = f(x)$ durch feiner und feiner werdende Rechtecke zu approximieren versuchen:



Die tatsächliche Fläche sollte sich als Grenzwert der Rechtecksflächensummen ergeben:

$$F \approx \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Das Riemannintegral: Gegeben sei ein Intervall $[a, b]$ und eine Funktion $f = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen Punkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ bilden eine *Zerlegung* Z des Intervalls $[a, b]$. Ihre *Feinheit* $\Phi(Z)$ ist die Länge des größten Teilintervalls:

$$\Phi(Z) = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|.$$

Wählt man beliebige Zwischenpunkte $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, so nennt man

$$S = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

eine *Riemannsumme*. Um die Idee des Grenzüberganges oben zu präzisieren, nehmen wir eine Folge Z_1, Z_2, Z_3, \dots von Zerlegungen, deren Feinheit $\Phi(Z_N) \rightarrow 0$ geht für $N \rightarrow \infty$, und zugehörige Riemannsummen S_N .

Definition: Eine Funktion f heißt auf $[a, b]$ *Riemann-integrierbar*, falls für beliebige Folgen von Zerlegungen $(Z_N)_{N \geq 1}$ mit $\Phi(Z_N) \rightarrow 0$ die zugehörigen Riemannsummen $(S_N)_{N \geq 1}$ gegen denselben Grenzwert $I(f)$ streben. Dieser Grenzwert

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

heißt das *bestimmte Integral* von f auf $[a, b]$.

In den einleitenden Beispielen ist folglich:

$$\begin{aligned} \text{Fläche unter Kurve} \dots F &= \int_a^b f(x) dx; \\ \text{Gesamtweg} \dots w &= \int_a^b v(t) dt. \end{aligned}$$

Beispiel 1: (a) $f(x) = c = \text{konstant}$. Dann ist die Fläche unter dem Funktionsgraphen die Rechtecksfläche $c(b - a)$. Vergleichen wir mit einer Riemannsumme

$$\begin{aligned} f(\xi_1)(x_1 - x_0) &+ f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) \\ &= c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Alle Riemannsummen sind gleich und es gilt tatsächlich

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[0, 1]$ nicht integrierbar: Jede Riemannsumme ist von der Form

$$\frac{1}{\xi_1}(x_1 - 0) + \frac{1}{\xi_2}(x_2 - x_1) + \dots + \frac{1}{\xi_n}(x_n - x_{n-1}).$$

Indem man ξ_1 nahe bei 0 wählt, kann jede Riemannsumme beliebig groß gemacht werden, also existiert der Grenzwert der Riemannsummen nicht.

(c) Die *Dirichletsche Sprungfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf $[0, 1]$ nicht integrierbar: Die Riemannsummen sind von der Form

$$S_N = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

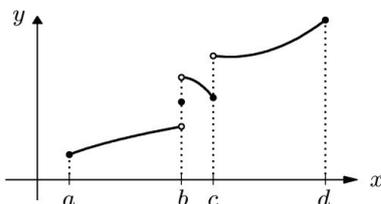
Falls alle $\xi_j \in \mathbb{Q}$ sind, so ist $S_N = 1$. Nimmt man alle $\xi_j \notin \mathbb{Q}$, so ist $S_N = 0$, der Grenzwert also nicht unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte ξ_j .

Satz: (a) Riemann-integrierbare Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind notwendigerweise beschränkt.

(b) Ist f beschränkt und monoton wachsend oder monoton fallend, so ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

(c) Jede auf dem Intervall $[a, b]$ stückweise stetige Funktion f ist Riemann-integrierbar.

Dabei heißt eine Funktion *stückweise stetig*, wenn sie stetig ist bis auf endlich viele Sprungstellen und überdies ihr Graph in jeder Sprungstelle einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt.



Bemerkung: Nimmt man äquidistante Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ für die Zerlegungen, also

$$x_j - x_{j-1} =: \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

so schreiben sich die Riemannsummen

$$S_N = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Delta x.$$

Der Übergang $\Delta x \rightarrow 0$ bei gleichzeitiger Vergrößerung der Anzahl der Summanden ins "Kontinuierliche" legt die Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx$$

nahe. Ursprünglich wurde sie von G. Leibniz durchaus mit der Interpretation einer unendlichen Summe über unendlich schmale Rechtecke der Breite dx eingeführt. Diese Interpretation kann heute im Rahmen der *Nichtstandard-Analysis* präzise gerechtfertigt werden.

Eigenschaften des Integrals. Im Folgenden sei $a < b$ und f, g Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

(a) Positivität:

$$\begin{aligned} f \geq 0 \text{ auf } [a, b] &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0, \\ f \leq 0 \text{ auf } [a, b] &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

(b) Monotonie:

$$f \leq g \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Insbesondere gilt mit

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

die Ungleichung

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(c) Summe und konstanter Faktor:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(d) Zerlegung des Integrationsbereichs: Es sei zunächst $a < b < c$ und f integrierbar auf $[a, c]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Definiert man

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

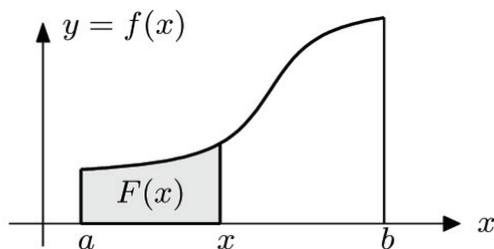
so erhält man die Gültigkeit der Summenformel sogar für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$, wenn f auf den jeweiligen Bereichen integrierbar ist.

Beweis: Alle Begründungen ergeben sich leicht durch Hinschreiben der Riemannsummen. \square

Bemerkungen: (a) zeigt, dass die Interpretation als Fläche unter dem Funktionsgraphen nur getreu ist, wenn $f \geq 0$ ist. Die Interpretation mittels Weg als Integral der Geschwindigkeit ist auch für negative Geschwindigkeiten bzw. Wege sinnvoll (Richtungsänderung). Punkt (d) ist vor allem wichtig für die Integration stückweise stetiger Funktionen: Das Integral ergibt sich als Summe über die Teilintegrale.

Die Summenfunktion: Wählt man die obere Grenze des Integrationsbereiches selbst als Variable, so erhält man eine neue Funktion $F(x)$, die *Summenfunktion* zu $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$



In der Flächeninterpretation ist $F(x)$ die Fläche unter dem Funktionsgraphen über dem Intervall $[a, x]$.

Hauptsätze der Integralrechnung: Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann gilt:

(a) (1. Hauptsatz:) Ist G eine Stammfunktion von f , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

(b) (2. Hauptsatz:) Die Summenfunktion F ist eine Stammfunktion von f , d.h.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Zum Beweis verweisen wir etwa auf die unten angegebene Literatur.

Anwendungen des ersten Hauptsatzes: Die wichtigste Anwendung besteht in der Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$. Man ermittle dazu eine Stammfunktion $F(x)$, etwa als unbestimmtes Integral, und setze ein:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Es gilt zum Beispiel:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1}^{x=3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Anwendungen des zweiten Hauptsatzes: Diese sind oft theoretischer Natur, wie die Beschreibung des Zusammenhangs Weg-Geschwindigkeit,

$$w(t) = w(0) + \int_0^t v(s) ds, \quad w'(t) = v(t),$$

wobei $w(t)$ den bis zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg und $v(t)$ die Momentangeschwindigkeit bezeichnet; oder aber numerischer Natur:

$$\int_0^x e^{-y^2} dy \quad \text{ist eine Stammfunktion von } e^{-x^2}.$$

Die Auswertung eines derartigen Integrals kann näherungsweise mittels numerischen Integrationsmethoden erfolgen (siehe unten).

Näherungsweise Berechnung des Integrals: Riemannsummen sind geeignet, eine Näherung an den Wert des Integrals zu berechnen, wobei die Genauigkeit mit zunehmender Feinheit der Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

größer wird. In diesem Zusammenhang werden die Zwischenpunkte ξ_j oft in spezieller Weise gewählt: als linker oder rechter Endpunkt des Intervalls $[x_{j-1}, x_j]$ oder als Mittelpunkt. Wählt man bei stetigem f die Zwischenpunkte ξ_j so, dass der Funktionswert $f(\xi_j)$ gleich dem kleinsten bzw. größten Wert von f im Teilintervall ist, genauer

$$f(\xi_j) = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \quad \text{bzw.} \quad f(\tilde{\xi}_j) = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

so erhält man eine so genannte *Untersumme* U bzw. *Obersumme* O zum Integral. Die Unter- und Obersummen ergeben Schranken für den Wert des Integrals:

$$U \leq \int_a^b f(x) dx \leq O,$$

welche mit wachsender Feinheit der Zerlegung immer enger werden.

Für eine effiziente numerische Approximation des Integrals stellen allerdings Riemannsummen nicht die beste Möglichkeit dar, es gibt rascher konvergente Methoden, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

2 Numerische Integration

Motiviert durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bietet sich folgende Vorgangsweise zur Berechnung von bestimmten Integralen an: Man sucht zunächst eine Stammfunktion F des Integranden f und bestimmt daraus den Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

In der *Praxis* ist es aber oft unmöglich, eine betreffende Stammfunktion F als Kombination *einfacher* Funktionen zu finden. Abgesehen davon können Stammfunktionen auch recht komplex sein, wie beispielsweise $\int x^{100} \sin x dx$. Schließlich ist in konkreten Anwendungen der Integrand oft nur numerisch und *nicht* durch eine explizite Formel gegeben. In all diesen Fällen greift man auf numerische Verfahren zurück.

Zur numerischen Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$ zerlegen wir das Integrationsintervall $[a, b]$ zunächst in Teilintervalle mit den *Stützstellen* (Gitterpunkten) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$.

Auf Grund der Additivität des Integrals gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx.$$

Somit ist es ausreichend, eine Näherungsformel für ein (kleines) Teilintervall der Länge $h_j = x_{j+1} - x_j$ zu finden. Ein Beispiel so einer Näherungsformel ist die *Trapezregel*, bei welcher die Fläche unter dem Funktionsgraphen durch die Fläche des entsprechenden Trapezes approximiert wird:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx h_j \frac{1}{2} (f(x_j) + f(x_{j+1})).$$

Für die Herleitung und Analyse solcher Näherungsformeln ist es zweckmäßig, eine Transformation auf das Intervall $[0, 1]$ durchzuführen. Setzt man $x = x_j + \tau h_j$, so erhält man wegen $dx = h_j d\tau$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \int_0^1 f(x_j + \tau h_j) h_j d\tau = h_j \int_0^1 g(\tau) d\tau$$

mit $g(\tau) = f(x_j + \tau h_j)$. Somit ist es ausreichend, Näherungsformeln für $\int_0^1 g(\tau) d\tau$ zu finden. Die Trapezregel lautet in diesem Fall

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} (g(0) + g(1)).$$

Sie ist offensichtlich *exakt*, falls $g(\tau)$ ein Polynom von Grad 0 oder 1 ist.

Um eine genauere Formel zu erhalten, fordern wir, dass auch quadratische Polynome exakt integriert werden. Sei für einen Moment

$$g(\tau) = \alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2$$

ein allgemeines Polynom von Grad 2. Wegen $g(0) = \alpha$, $g(\frac{1}{2}) = \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\gamma$ und $g(1) = \alpha + \beta + \gamma$ gilt

$$\int_0^1 (\alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2) d\tau = \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{6} \left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) \right).$$

Die für allgemeines g daraus folgende Näherungsformel

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \approx \frac{1}{6} \left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) \right)$$

ist somit exakt für Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2; sie heißt *Simpsonregel*.

Die spezielle Form der Trapez- und Simpsonregel motiviert nun folgende Definition.

Definition: Die Näherungsformel

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^s b_i g(c_i)$$

bezeichnet man als *Quadraturformel*. Die Zahlen b_1, \dots, b_s heißen *Gewichte*, die Zahlen c_1, \dots, c_s heißen *Knoten* der Quadraturformel; s nennt man Anzahl der *Stufen*.

Eine Quadraturformel ist durch Angabe der Gewichte und Knoten festgelegt. Wir schreiben für eine Quadraturformel deshalb kurz $\{(b_i, c_i), i = 1, \dots, s\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sind die Gewichte b_i nicht Null und die Knoten paarweise verschieden ($c_i \neq c_k$ für $i \neq k$).

Beispiel 2: (a) Die Trapezregel hat $s = 2$ Stufen und ist gegeben durch

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$

(b) Die Simpsonregel hat $s = 3$ Stufen und ist gegeben durch

$$b_1 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \quad b_3 = \frac{1}{6}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 1.$$

Um Quadraturformeln zur Berechnung des ursprünglichen Integrals $\int_a^b f(x) dx$ zu verwenden, macht man die Transformation von f nach g wieder rückgängig. Wegen $g(\tau) = f(x_j + \tau h_j)$ gilt

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = h_j \int_0^1 g(\tau) d\tau \approx h_j \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) = h_j \sum_{i=1}^s b_i f(x_j + c_i h_j).$$

Somit erhält man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{N-1} h_j \sum_{i=1}^s b_i f(x_j + c_i h_j).$$

Wir suchen nun Quadraturformeln, die möglichst genau sind. Nachdem der Integrand auf kleinen Intervallen typischerweise gut durch Taylorpolynome approximiert wird, zeichnet sich eine *gute* Quadraturformel dadurch aus, dass sie möglichst viele Polynome *exakt* integriert. Dieser Gedanke motiviert folgende Definition.

Definition: (Ordnung) Die Quadraturformel $\{(b_i, c_i), i = 1, \dots, s\}$ besitzt *Ordnung* p , falls alle Polynome g vom Grad kleiner oder gleich $p - 1$ von der Quadraturformel exakt integriert werden, d.h. falls gilt

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^s b_i g(c_i)$$

für alle Polynome g vom Grad kleiner gleich $p - 1$.

Beispiel 3: (a) Die Trapezregel hat Ordnung 2.

(b) Die Simpsonregel hat (nach Konstruktion) zumindest Ordnung 3.

Der folgende Satz liefert eine algebraische Charakterisierung der Ordnung von Quadraturformeln.

Satz: Eine Quadraturformel $\{(b_i, c_i), i = 1, \dots, s\}$ hat Ordnung $p \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \quad \text{für } 1 \leq q \leq p.$$

Beweis: Man verwendet, dass ein Polynom g vom Grad $p - 1$

$$g(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \dots + \alpha_{p-1} \tau^{p-1}$$

eine Linearkombination von Monomen ist, und dass Integration und Anwendung einer Quadraturformel *lineare* Prozesse sind. Somit genügt es, die Monome

$$g(\tau) = \tau^{q-1}, \quad 1 \leq q \leq p$$

zu betrachten. Die Behauptung folgt nun sofort aus der Identität

$$\frac{1}{q} = \int_0^1 \tau^{q-1} d\tau = \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) = \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1}. \quad \square$$

Die Bedingungen des Satzes

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_s &= 1 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_s c_s &= \frac{1}{2} \\ b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 + \dots + b_s c_s^2 &= \frac{1}{3} \\ &\vdots \\ b_1 c_1^{p-1} + b_2 c_2^{p-1} + \dots + b_s c_s^{p-1} &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

heißen *Ordnungsbedingungen* für Ordnung p . Gibt man s Knoten c_1, \dots, c_s vor, so stellen die Ordnungsbedingungen ein *lineares* Gleichungssystem für die unbekanntenen Gewichte b_i dar. Falls die Knoten paarweise verschieden sind, lassen sich die Gewichte daraus eindeutig bestimmen. Das zeigt, dass zu s *verschiedenen* Knoten stets eine *eindeutige* Quadraturformel der Ordnung $p \geq s$ existiert.

Beispiel 4: Wir berechnen nochmals die Ordnung der Simpsonregel. Wegen

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ist die Ordnung zumindest 3 (wie wir bereits auf Grund der Konstruktion wissen). Es gilt jedoch zusätzlich

$$b_1c_1^3 + b_2c_2^3 + b_3c_3^3 = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

d.h. die Simpsonregel hat sogar Ordnung 4.

Die besten Quadraturformeln (optimale Genauigkeit bei möglichst wenig Aufwand) sind die Gauß'schen Quadraturformeln. Zu gegebenem $s \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Quadraturformel der Ordnung $p = 2s$. Diese wird als *Gauß'sche* Quadraturformel mit s Stufen bezeichnet.

Die Gauß'schen Quadraturformeln für $s \leq 3$ lauten

$$\begin{aligned} s = 1: \quad c_1 &= \frac{1}{2}, \quad b_1 = 1, \quad \text{Ordnung 2 (Mittelpunktsregel);} \\ s = 2: \quad c_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{Ordnung 4;} \\ s = 3: \quad c_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}, \\ & b_1 = \frac{5}{18}, \quad b_2 = \frac{8}{18}, \quad b_3 = \frac{5}{18}, \quad \text{Ordnung 6.} \end{aligned}$$

Weitere Ausführungen zum Riemannintegral und zu numerischer Integration finden Sie in den Abschnitten 11 und 13 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.