2D-Visualisierung komplexer Funktionen

1 Komplexe Zahlen

Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, in der das Polynom $z^2 + 1$ eine Nullstelle besitzt. Man kann sie als Paare (a, b) reeller Zahlen einführen, auf denen Addition und Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d),\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc).\end{aligned}$$

Die reellen Zahlen werden als die Teilmenge aller Paare der Form $(a, 0), a \in \mathbb{R}$ aufgefasst. Offenbar gilt für das Paar $(0, 1)$, dass

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

ist, also sein Quadrat der reellen Zahl -1 entspricht und somit eine Nullstelle des Polynoms z^2+1 liefert. Bezeichnet man diese Nullstelle mit i, also

$$\mathrm{i}^2 = -1,$$

so kann man eine rechnerisch günstigere Darstellung der Menge der komplexen Zahlen erhalten, indem man die Paare (a, b) in der Form $a + \mathrm{i}b$ schreibt:

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b\ ;\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Den oben definierten Rechenoperationen mit Paaren (a, b) entspricht dann einfach das gewohnte Rechnen mit den Ausdrücken $a + \mathrm{i}b$ *wie mit Termen* unter Berücksichtigung der Beziehung $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d) &= a+c+\mathrm{i}(b+d),\\ (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) &= ac+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}^2bd \quad = \quad ac-bd+\mathrm{i}(ad+bc).\end{aligned}$$

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ bezeichnet

$$x = \operatorname{Re} z,\ \ y = \operatorname{Im} z$$

den *Realteil* bzw. den *Imaginärteil* von z,

$$\sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

den *Betrag* von z und

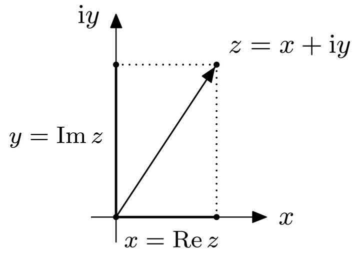
$$x - \mathrm{i}y = \bar{z}$$

die zu z *konjugiert komplexe* Zahl. Es gilt

$$z\bar{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

Das heißt, $z\bar{z}$ ist stets eine reelle Zahl.

Die komplexe Zahlenebene: Eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen erhält man, indem man $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Koordinatenebene identifiziert. Geometrisch ist dann $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Ortsvektors (x, y); die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ erhält man durch Spiegelung an der x-Achse.



Die *Polardarstellung* einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\,y$ erhält man durch

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ \varphi &= \arg_H z = \operatorname{sign} y \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Der Winkel φ wird als *Argument* der komplexen Zahl bezeichnet, wobei die Wahl des Bereiches $-\pi < \varphi \leq \pi$ den *Hauptwert* des Argumentes definiert. Somit gilt:

$$z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi).$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\,\sin\psi)$ in Polardarstellung entspricht dem Produkt der Beträge und der Summe der Winkel:

$$zw = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi+\psi)\big),$$

was aus den Summenformeln für Sinus und Cosinus folgt:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi+\psi) &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi, \\ \cos(\varphi+\psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi. \end{aligned}$$

Die komplexe Exponentialfunktion: Für $z = x + \mathrm{i}\,y$ definiert man

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y).$$

Aus den Summenformeln für Sinus und Cosinus folgen die üblichen Rechenregeln

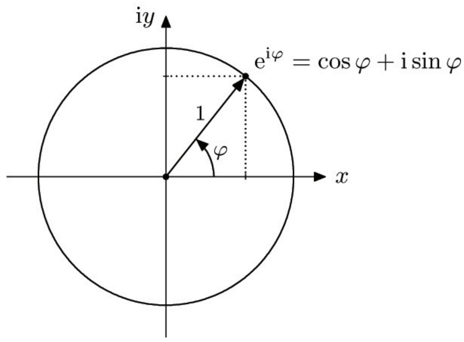
$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w},\ \mathrm{e}^{0} = 1, (\mathrm{e}^{z})^{n} = \mathrm{e}^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

gültig für $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Im Gegensatz zum Reellen gilt die zweite Regel (für das Potenzieren) im Allgemeinen nicht, wenn n keine natürliche Zahl ist. Die komplexe Exponentialfunktion bildet $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ (ohne Null) ab. Sie ist eine *Erweiterung* der reellen Exponentialfunktion, das heißt, ist $z = x \in \mathbb{R}$, so ergibt $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}$ das gewohnte reelle Ergebnis. Man benützt auch die Notation $\exp(z)$ für e^{z}.

Exponentialfunktion und Polarkoordinaten: Nach Definition ist die Exponentialfunktion einer rein imaginären Zahl $\mathrm{i}\,\varphi$ gleich

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi, \\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}| &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

Somit durchlaufen die komplexen Zahlen $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} : -\pi < \varphi \leq \pi\}$ den Einheitskreis:



Es gilt zum Beispiel:

$$e^{i\pi/2} = i, \; e^{i\pi} = -1, \; e^{2i\pi} = 1, \; e^{2ki\pi} = 1 \; (k \in \mathbb{Z}).$$

Mit $r = |z|, \varphi = \arg_H z$ ergibt sich die besonders einfache Form der Polardarstellung

$$z = re^{i\varphi}.$$

Das Wurzelziehen wird auch entsprechend einfach. Ist $z = re^{i\varphi}$, so erhält man für $\sqrt{z}$ die beiden Lösungen $\pm\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$.

2 Abbildungseigenschaften komplexer Funktionen

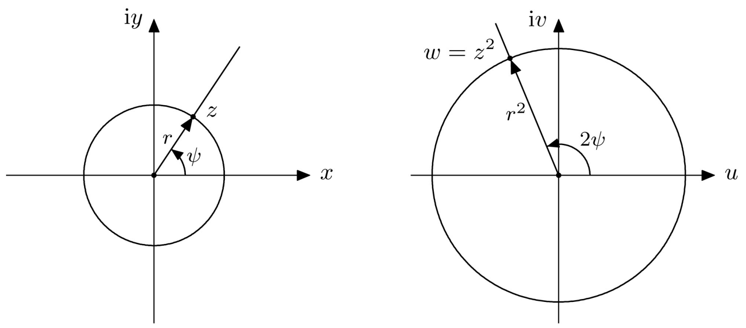
In diesem Abschnitt werfen wir einen Blick auf Abbildungseigenschaften komplexer Funktionen, das heißt, wie ihre Wirkung geometrisch beschrieben werden kann. Es sei

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w = f(z)$$

eine komplexe Funktion, definiert auf einer Teilmenge D der komplexen Zahlen. Die Wirkungsweise der Funktion f kann am besten visualisiert werden, indem man zwei komplexe Zahlenebenen nebeneinander zeichnet, die z-Ebene und die w-Ebene, und die Bilder von Strahlen und Kreisen unter f einträgt.

Beispiel: Die komplexe Quadratfunktion bildet $D = \mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ ab: $w = z^2$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten ergibt sich

$$z = x + iy = r\,e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad w = u + iv = r^2 e^{2i\varphi}.$$

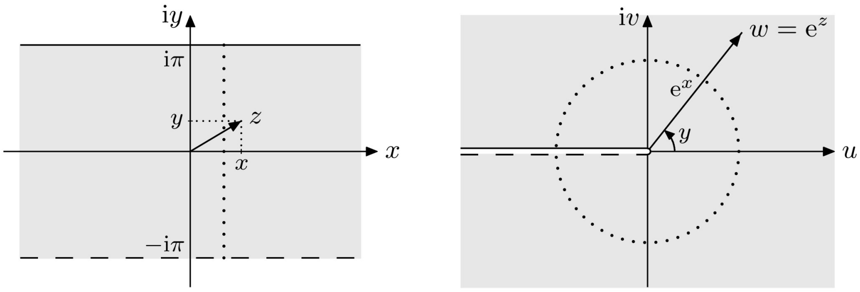


Daraus ist ersichtlich, dass die komplexe Quadratfunktion Kreise vom Radius r in der z-Ebene auf Kreise vom Radius r^2 in der w-Ebene sowie Halbstrahlen

$$\{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi} : r > 0\}$$

mit Neigungswinkel ψ auf Halbstrahlen mit Neigungswinkel 2ψ abbildet.

Besonders wichtig sind die Abbildungseigenschaften der komplexen Exponentialfunktion, $w = \mathrm{e}^z$, liegen diese doch der Definition des komplexen Logarithmus und der Wurzelfunktionen zu Grunde. Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$, so ist $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$. Es ist immer $\mathrm{e}^x > 0$; weiters definiert $\cos y + \mathrm{i}\,\sin y$ einen Punkt auf dem komplexen Einheitskreis, welcher für $-\pi < y \leq \pi$ eindeutig ist. Durchläuft x die reellen Zahlen, so bilden die Punkte $\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$ einen Halbstrahl mit Winkel y (Abbildung unten). Hält man umgekehrt x fest und lässt y zwischen $-\pi$ und π laufen, so ergibt sich der Kreis mit Radius e^x in der w-Ebene. Zum Beispiel ist der punktierte Kreis (rechtes Bild) die Bildmenge der punktierten Geraden (linkes Bild) unter der Exponentialfunktion.



Aus dem eben Gesagten ergibt sich, dass die Exponentialfunktion auf den Bereichen

$$D = \{z = x + \mathrm{i}\,y\ ;\ x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\} \to B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

bijektiv ist, also den Streifen der Breite 2π auf die komplexe Zahlenebene ohne die Null abbildet. Der Graph der Exponentialfunktion weist längs der negativen u-Achse einen Sprung auf, was in der Abbildung (rechts) angedeutet ist. Im Bereich D besitzt die Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion, den *Hauptwert oder Hauptzweig des komplexen Logarithmus.* Aus der Darstellung $w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}$ ersieht man den Zusammenhang $x = \log|w|$, $y = \arg_H w$. Somit ist der Hauptwert des komplexen Logarithmus der komplexen Zahl w gegeben durch

$$z = \log_H w = \log|w| + \mathrm{i}\,\arg_H w$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$\log_H\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\right) = \log r + \mathrm{i}\varphi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Vertikale Verschiebung des Streifens B, auf dem die Exponentialfunktion bijektiv ist, ergibt die Nebenzweige des Logarithmus.

Mit Hilfe des Hauptwerts des komplexen Logarithmus lassen sich die Hauptwerte der n-ten komplexen Wurzelfunktionen durch $\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{1}{n}\log_H(z)\right)$ definieren.

Beispiel: Das Applet *2D-Visualisierung komplexer Funktionen* erlaubt es zu untersuchen, wie die Potenzfunktionen $w = z^n, n \in \mathbb{N}$, Kreise und Strahlen der komplexen Zahlenebene abbilden. Stellen Sie dazu das Muster *Polarkoordinaten* ein und experimentieren Sie mit verschiedenen Sektoren (Intervall des Arguments $[\alpha, \beta]$ mit $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$).

Ebenso kann mit dem Applet untersucht werden, wie die Exponentialfunktion $w = \mathrm{e}^{z}$ horizontale und vertikale Geraden der komplexen Zahlenebene abbildet. Stellen Sie dazu das Muster *Gitter* ein und experimentieren Sie mit verschiedenen Streifen, zum Beispiel $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$.

Mit Hilfe der Musteroption *Schnitte* kann aus einem in Polarkoordinaten gegebenen Bereich ein schmaler Sektor herausgeschnitten werden. Dies erlaubt es, Unstetigkeitsstellen oder Unendlichkeitsstellen aus dem Definitionsbereich für die graphische Darstellung einer komplexen Funktion zu entfernen.

Weitere Ausführungen zu komplexen Zahlen und Funktionen finden Sie im Abschnitt 4 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.