Ebene Kurven

Definition: Eine *parametrisierte ebene Kurve* ist eine stetige Abbildung

$$t \to \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

eines Intervalls $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^2$. Dabei heißt $t \in [a, b]$ der *Kurvenparameter*.

Beide Komponentenabbildungen $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ werden als stetig vorausgesetzt.

Beispiel 1: Ein in Höhe h mit Horizontalgeschwindigkeit v_H und Vertikalgeschwindigkeit v_V geworfener Körper besitzt die Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= v_H t \\ y(t) &= h + v_V t - \frac{g}{2}\, t^2, \end{aligned}$$

$0 \le t \le t_0$, wobei t_0 die positive Lösung der Gleichung $h + v_V t_0 - \frac{g}{2} t_0^2 = 0$ ist (Aufprallzeitpunkt).

Elimination von t, Darstellung der Bahnkurve als Funktionsgraph:

$$\begin{aligned} t &= x/v_H \\ y &= h + v_V x/v_H - \frac{g}{2} \left(x/v_H\right)^2. \end{aligned}$$

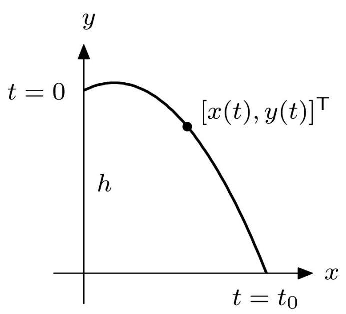
Beispiel 2: Ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R besitzt die Parameterdarstellung

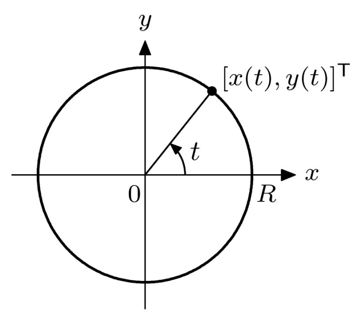
$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t, \\ y(t) &= R\sin t, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

In diesem Fall ist t als der Winkel mit der x-Achse interpretierbar. Die Komponenten $x = x(t)$, $y = y(t)$ erfüllen die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

jedoch kann man die Kreislinie nicht in ihrer Gesamtheit als Funktionsgraphen darstellen.





Der kinematische Standpunkt: Hier fasst man den Kurvenparameter t als Zeit auf, die Kurve als Bahnkurve. Verschiedene Parametrisierungen desselben geometrischen Objektes sind dann verschiedene Kurven.

Der geometrische Standpunkt: Hier will man den geometrischen Ort, die Durchlaufrichtung und die Anzahl der Durchläufe als Grundeigenschaften einer Kurve festhalten, nicht jedoch die Parametrisierung.

Eine strikt monoton wachsende, stetige Abbildung eines Intervalls $[\alpha, \beta]$ nach $[a, b]$,

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

heißt *Parameterwechsel*. Die Kurve

$$\tau \to \boldsymbol{\xi}(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

heißt *Umparametrisierung* der Kurve

$$t \to \mathbf{x}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

wenn sie aus dieser durch einen Parameterwechsel hervorgeht, also

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \mathbf{x}(\varphi(\tau))$$

ist. Im geometrischen Standpunkt werden die parametrisierten Kurven $\tau \to \boldsymbol{\xi}(\tau)$ und $t \to \mathbf{x}(t)$ identifiziert. Eine *ebene Kurve* Γ ist eine *Äquivalenzklasse parametrisierter Kurven*, die durch Umparametrisierung ineinander übergeführt werden können.

Beispiel 3: Das Parabelstück

$$\Gamma : \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Umparametrisierungen sind etwa

$$\begin{aligned} \varphi &: [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \to [-1, 1], & \varphi(\tau) &= 2\tau, \\ \tilde{\varphi} &: [-1, 1] \to [-1, 1], & \tilde{\varphi}(t) &= \tau^3, \end{aligned}$$

sodass also

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{bmatrix} 2\tau \\ 4\tau^2 \end{bmatrix}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \tau \leq \tfrac{1}{2}$$

und

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau^3 \\ \tau^6 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

geometrisch dieselbe Kurve darstellt.

$$\begin{aligned} \psi &: [-1, 1] \to [-1, 1], & \psi(\tau) &= -\tau, \\ \tilde{\psi} &: [0, 1] \to [-1, 1], & \tilde{\psi}(\tau) &= -1 + 8\tau(1 - \tau) \end{aligned}$$

sind keine Umparametrisierungen und ergeben andere Kurven, nämlich

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tau) &= \begin{bmatrix} -\tau \\ \tau^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \tau \leq 1\,; \\ \mathbf{z}(\tau) &= \begin{bmatrix} -1 + 8\tau(1 - \tau) \\ (-1 + 8\tau(1 - \tau))^2 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 1\,. \end{aligned}$$

Im ersten Fall wird Γ umgekehrt durchlaufen, im zweiten Fall zweimal.

Algebraische Kurven: Diese erhält man als Nullstellengebilde von Polynomen in zwei Variablen. Wir hatten bereits Parabel und Kreis

$$y - x^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Man kann auf diese Weise auch Spitzen und Schleifen erzeugen.

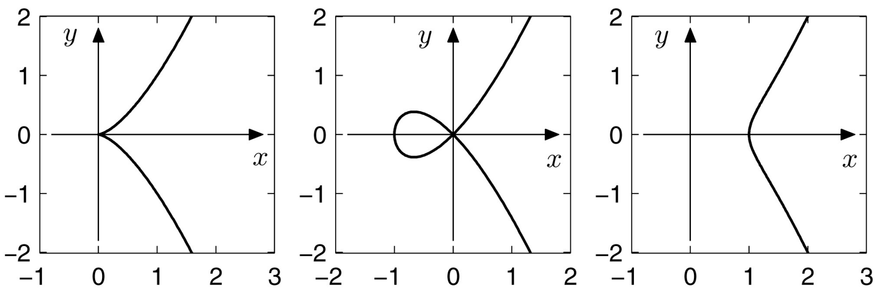
Beispiel 4: Die Neilsche Parabel

$$y^2 - x^3 = 0$$

besitzt eine Spitzpunkt ("cusp") in $x = y = 0$. Allgemein erhält man mittels

$$y^2 - (x+p)x^2 = 0, \qquad p \in \mathbb{R}$$

algebraische Kurven, die für $p > 0$ eine Schleife besitzen.



Parameterdarstellungen: $x(t) = t^2 - p,\ y(t) = t(t^2 - p)$.

Differenzierbare Kurven: Wenn in einer Parametrisierung die Komponentenabbildungen $t \to x(t),\ t \to y(t)$ differenzierbar sind, so sprechen wir von einer *differenzierbaren Kurve*. Ebenso: zwei- oder mehrmals differenzierbare Kurven.

Beispiel 5: Gerade und Halbstrahl. Die Parameterdarstellung

$$t \to \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$$

beschreibt eine Gerade durch den Punkt $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]^\mathsf{T}$ mit Richtungsvektor $\mathbf{r} = [r_1, r_2]^\mathsf{T}$. Schränkt man den Parameter t auf den Bereich $0 \le t < \infty$ ein, so erhält man einen Halbstrahl. Die Darstellung

$$\mathbf{x}_H(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$$

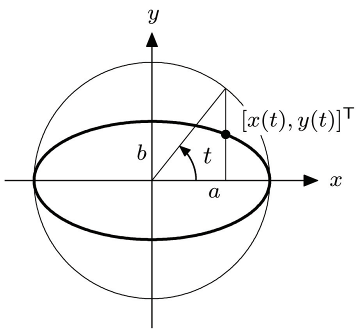
bewirkt zweimaliges Durchlaufen des Halbstrahls.

Beispiel 6: Parameterdarstellung der Ellipse. Die Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Eine Parameterdarstellung (einmaliges Durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn) erhält man vermöge

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t, \\ y(t) &= b\sin t, \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$



Beispiel 7: Parameterdarstellung der Hyperbel. Wir führen zunächst die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus ein:

$$\sinh t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right), \quad \cosh t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right).$$

Eine wichtige Eigenschaft ist die Identität

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

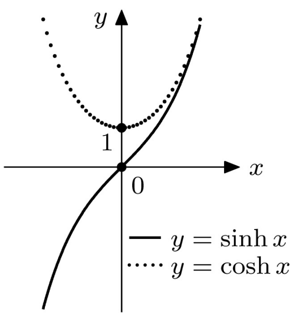
Daraus ersieht man, dass durch

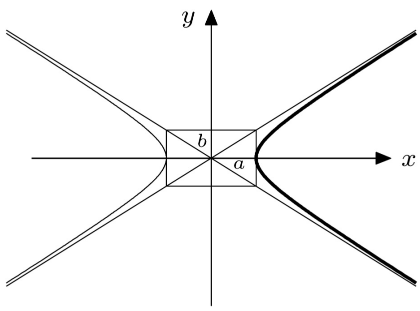
$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cosh t \\ y(t) & = & b\sinh t \end{array} \qquad -\infty < t < \infty$$

eine Parameterdarstellung des rechten Astes der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

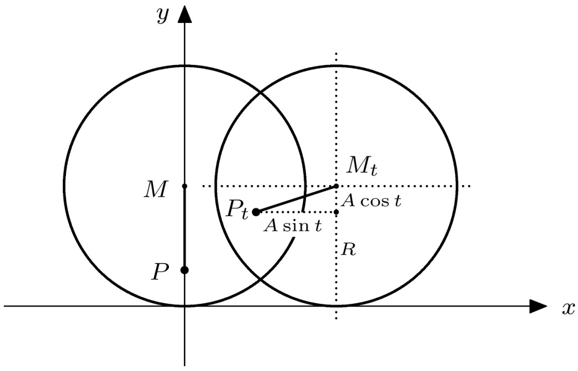
gegeben ist.

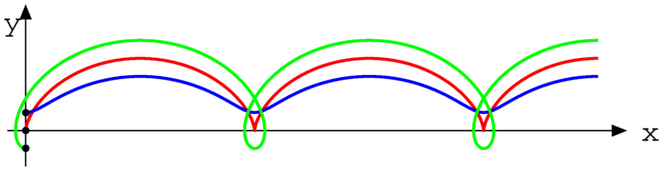




Beispiel 8: Die Zykloiden. Ein Kreis von Radius R rolle (ohne zu gleiten) entlang der x-Achse. Ist die Ausgangslage des Mittelpunktes M anfangs $M = (0, R)$, so nach Zurücklegen des Rollwinkels t dann $M_t = (Rt, Rt)$. Ein Punkt P mit Anfangslage $P = (0, R - A)$, $A \in \mathbb{R}$, bewegt sich dabei nach $P_t = M_t - (A\sin t, A\cos t)$. Diese Bahnkurve ist eine *Zykloide:*

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Rt - A\sin t \\
y(t) &= R - A\cos t,
\end{aligned}
\qquad -\infty < t < \infty.
$$





Kurventangente und Kurvennormale: Die Änderungsrate des Ortsvektors in Bezug auf den Kurvenparameter ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)\Big) = \begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}.$$

In der kinematischen Interpretation (t ... Zeit) ist $\dot{\mathbf{x}}(t)$ der *Geschwindigkeitsvektor* des Kurvenpunktes. Ist er von Null verschieden, so weist er in die positive Tangentenrichtung (als Grenzwert von Sekantenvektoren). Der Einheitsvektor derselben Richtung heißt *Tangentenvektor:*

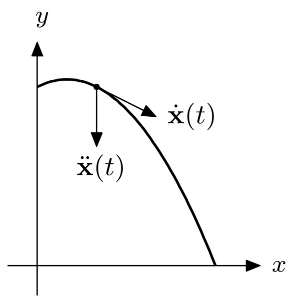
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}$$

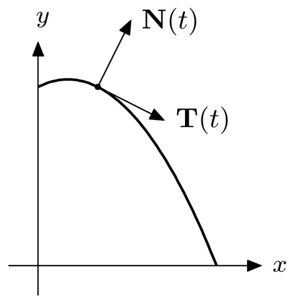
Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn ergibt den *Normalvektor:*

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}.$$

Der *Beschleunigungsvektor* einer zweimal differenzierbaren Kurve:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}\ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{bmatrix}.$$





Beispiel 9: Für die Wurfparabel aus Beispiel 1 gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_H & \ddot{x}(t) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= v_V - gt & \ddot{y}(t) &= -g \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{v_H^2 + (v_V - gt)^2}} \begin{bmatrix} v_H \\ v_V - gt \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{v_H^2 + (v_V - gt)^2}} \begin{bmatrix} gt - v_V \\ v_H \end{bmatrix}$$

Das begleitende Zweibein: Der Tangentenvektor $\mathbf{T}(t)$ und der Normalvektor $\mathbf{N}(t)$ stellen eine im Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t)$ angeheftete orthogonale Basis dar, das *begleitende Zweibein.* Wie das Applet zeigt, ist das begleitende Zweibein sehr hilfreich beim Visualisieren des Kurvenverlaufs und des kinematischen Verhaltens. Darstellung der Kurven aus Beispiel 3 und Beispiel 5 im Applet gibt einen guten Eindruck von der Erklärungskraft des Zweibeins.

Beispiel 10: Eine Analyse der Kurven

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 - 2t^2 \\ (1 - 2t^2)^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1; \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \\ \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} t \cos t \\ t^2 \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad 6 - 2 \leq t \leq 2. \end{aligned}$$

ist mit Hilfe des Applets und des Zweibeins leicht durchfürbar. Insbesondere kann überprüft werden, ob die Kurven geometrisch äquivalent sind.

Kurven in Polarkoordinaten: Durch Ansetzen der Parameterdarstellung in der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos t, \\ y(t) &= r(t) \sin t, \end{aligned}$$

t als Winkel, $r(t)$ als Radius in Polarkoordinaten, erhält man eine Vielzahl von Kurven. Es ist dabei die Konvention in Kraft, negative Radien in Gegenrichtung des Strahls mit Winkel t aufzutragen.

Beispiel 11: Spiralen. Die *Archimedische Spirale* ist definiert durch

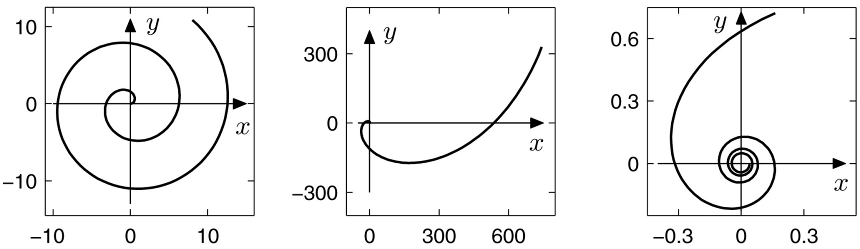
$$r(t) = t, \qquad 0 \leq t < \infty,$$

die *logarithmische Spirale* durch

$$r(t) = \mathrm{e}^t, \qquad -\infty < t < \infty,$$

die *hyperbolische Spirale* durch

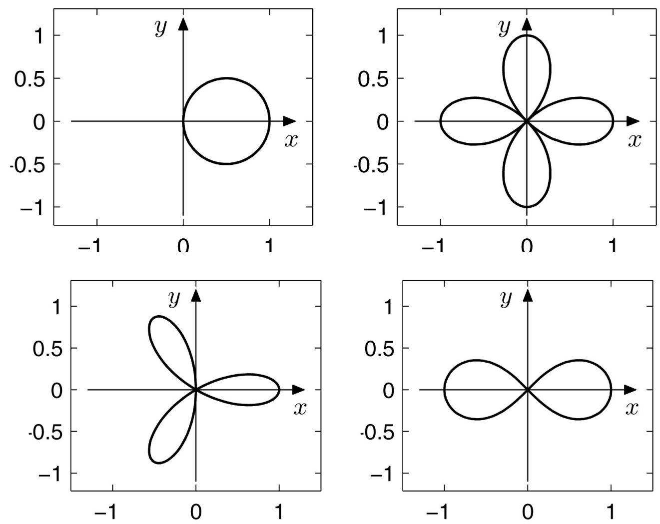
$$r(t) = \frac{1}{t}, \qquad 0 < t < \infty.$$



Beispiel 12: Schleifen. Diese erhält man mittels $r(t) = \cos nt,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos nt \cos t \\ y(t) &= \cos nt \sin t. \end{aligned}$$

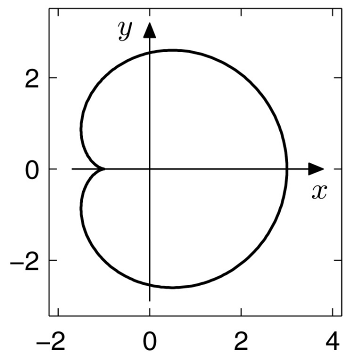
Für $n = 1$ erhält man einen Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ um $(\frac{1}{2}, 0)$, für ungerades n erhält man n Blätter, für gerades n erhält man $2n$ Blätter.



Die Lemniskate (Achterkurve) erhält man durch $r^2(t) = \cos 2t$, $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$. Die Abbildung zeigt Schleifen mit $r = \cos t$, $r = \cos 2t$, $r = \cos 3t$ und eine Lemniskate.

Beispiel 13: Die Herzlinie (Kardioide). Sie ist eine spezielle Epizykloide, bei der ein Kreis auf einem anderen Kreis vom selben Radius A abrollt. Ihre Parameterdarstellung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A\cos t + A\cos 2t \\ y(t) &= 2A\sin t + A\sin 2t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$



Weitere Ausführungen zu Kurven in der Ebene finden Sie im Abschnitt 14 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.