Kurven im Raum

Für die Grundlagen der Kurventheorie verweisen wir auf die Erläuterungen zum Applet “Kurven in der Ebene”.

In Analogie zu einer ebenen Kurve ist eine *parametrisierte Raumkurve* definiert als stetige Abbildung eines Intervalls $[a, b]$ in den $\mathbb{R}^3$,

$$t \to \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

Die Kurve heißt *differenzierbar*, wenn alle drei Komponentenfunktionen $t \to x(t),\ t \to y(t),\ t \to z(t)$ differenzierbare reellwertige Funktionen sind.

Geschwindigkeitsvektor und Tangentenvektor einer differenzierbaren Kurve sind ebenfalls analog zum ebenen Fall definiert als

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}.$$

Der Beschleunigungsvektor ist $\ddot{\mathbf{x}}(t)$.

Im räumlichen Fall gibt es eine *Normalebene* zur Kurve, die durch den *Hauptnormalenvektor*

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}\ \dot{\mathbf{T}}(t)$$

und den *Binormalenvektor*

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

aufgespannt werden (jeweils $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0,\ \dot{\mathbf{T}}(t) \neq 0$ vorausgesetzt). Dass $\dot{\mathbf{T}}(t)$ orthogonal zu $\mathbf{T}(t)$ ist , ersieht man aus der Rechnung

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \|\mathbf{T}(t)\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 2\langle \mathbf{T}(t), \dot{\mathbf{T}}(t) \rangle.$$

Das begleitende Dreibein: Der Tangentenvektor $\mathbf{T}(t)$, der Hauptnormalenvektor $\mathbf{N}(t)$ und der Binmormalenvektor $cB(t)$ stellen eine im Kurvenpunkt $\mathbf{x}(t)$ angeheftete orthogonale räumliche Basis dar, das *begleitende Dreibein*. Wie das Applet zeigt, ist das begleitende Dreibein hilfreich beim Visualisieren des Kurvenverlaufs und des kinematischen Verhaltens.

Beispiel 1: Die Schraubenlinie

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < \infty.$$

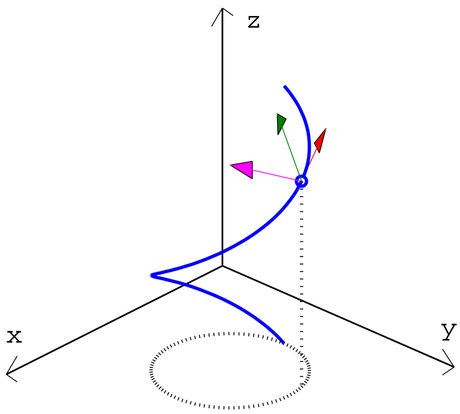
Es ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Schraubenlinie mit Tangenten-, Normalen- und Binormalenvektor.



Beispiel 2: Die Kurve von Viviani

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \le t \le 4\pi$$

ist die Schnittlinie des Drehzylinders $(x-1)^2 + y^2 = 1$ mit der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, wie eine kurze Rechnung unter Zuhilfenahme der Formel $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$ zeigt. Die Kurve ist als Beispiel im Applet aufgenommen.

Weitere Ausführungen zu Kurven im Raum finden Sie im Abschnitt 14 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.