

# Das Newtonverfahren

Dieser Artikel enthält einen kleinen Exkurs in die Berechnung von Nullstellen stetiger Funktionen  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Hat man ein Intervall  $[a, b]$  gefunden mit

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \quad \text{oder} \quad f(a) > 0, f(b) < 0$$

so erreicht man beim *Bisektionsverfahren* durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls eine Nullstelle  $\xi$  von  $f$ :

$$a = a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq \xi \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 = b$$

wobei gilt:

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{1}{2} |b_n - a_n| = \frac{1}{4} |b_{n-1} - a_{n-1}| = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_1 - a_1|.$$

Bricht man also das Verfahren nach  $n$  Schritten ab und wählt  $a_n$  oder  $b_n$  als Näherung für  $\xi$ , so erhält man als garantierte Fehlerschranke

$$|\text{Fehler}| \leq \varphi(n) = |b_n - a_n|$$

Insbesondere gilt

$$\varphi(n+1) = \frac{1}{2} \varphi(n),$$

der Fehler reduziert sich also bei jedem Schritt (wenigstens) um den konstanten Faktor  $\frac{1}{2}$ . Man bezeichnet so ein Verfahren als *linear konvergent*. Allgemeiner heißt ein iteratives Verfahren konvergent von der *Ordnung*  $\alpha$ , wenn Fehlerschranken  $(\varphi(n))_{n \geq 1}$  und eine Konstante  $C$  angegeben werden können, sodass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n+1)}{(\varphi(n))^\alpha} = C.$$

Für hinreichend große  $n$ , etwa  $n \geq n_0$  gilt also näherungsweise

$$\varphi(n+1) \approx C(\varphi(n))^\alpha.$$

Lineare Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &\approx C\varphi(n) \approx C^2\varphi(n-1) \approx \dots \approx C^{k+1}\varphi(n-k) \\ &\dots \approx C^{n-n_0+1}\varphi(n_0). \end{aligned}$$

Trägt man den Logarithmus von  $\varphi(n)$  gegen  $n$  auf (halblogarithmische Darstellung), so erhält man eine Gerade:

$$\log \varphi(n+1) \approx n \log C + \log \left( C^{1-n_0} \varphi(n_0) \right),$$

wobei also  $\varphi(n+1) \rightarrow 0$  geht, wenn  $C < 1$  ist. Insbesondere folgt, dass sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen in jedem Iterationsschritt um eine Konstante erhöht. Quadratische Konvergenz würde bedeuten, dass sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen mit jedem Iterationsschritt näherungsweise verdoppelt.

Die Konstruktion des *Newtonverfahrens* zielt darauf ab, quadratische Konvergenz ( $\alpha = 2$ ) zu erhalten, zumindest wenn man "nahe genug" bei der Nullstelle  $\xi$  startet und diese eine einfache Nullstelle einer differenzierbaren Funktion ist. Die geometrische Idee hinter dem Newtonverfahren ist einfach: Hat man eine Näherung  $x_n$  gewählt, so berechnet man  $x_{n+1}$  als Schnittpunkt der Tangente an den Graphen von  $f$  durch  $(x_n, f(x_n))$  mit der  $x$ -Achse. Die Tangentengleichung ist

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Den Schnittpunkt  $x_{n+1}$  mit der  $x$ -Achse erhält man aus

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wobei natürlich  $f'(x_n) \neq 0$  vorauszusetzen ist, was zutrifft, wenn  $x_n$  nahe der einfachen Nullstelle  $\xi$  liegt (dort ist  $f'(\xi) \neq 0$ ); siehe dazu Abbildung 1.

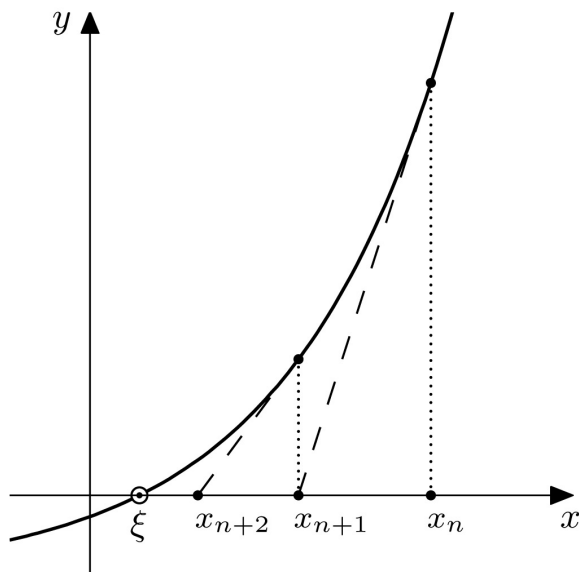


Abbildung 1: Zum Newtonverfahren.

**Satz:** Sei  $f$  zweimal stetig differenzierbar,  $f(\xi) = 0$  und  $f'(\xi) \neq 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U_\varepsilon(\xi)$ , sodass das Newtonverfahren für jeden Startwert  $x_0 \in U_\varepsilon(\xi)$  quadratisch gegen  $\xi$  konvergiert.

*Beweis:* Da  $f'(\xi) \neq 0$  ist und  $f'$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U_\varepsilon(\xi)$  und ein  $\delta > 0$ , sodass  $|f'(x)| \geq \delta$  ist für alle  $x \in U_\varepsilon(\xi)$ . Zweimalige Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &= \left| x_n - \xi - \frac{f(x_n) - f(\xi)}{f'(x_n)} \right| \\ &\leq |x_n - \xi| \left| 1 - \frac{f'(\eta)}{f'(x_n)} \right| = |x_n - \xi| \frac{|f'(x_n) - f'(\eta)|}{|f'(x_n)|} \\ &\leq |x_n - \xi|^2 \frac{|f''(\zeta)|}{|f'(x_n)|} \end{aligned}$$

mit  $\eta$  zwischen  $x_n$  und  $\xi$  und  $\zeta$  zwischen  $x_n$  und  $\eta$ . Es bezeichne  $M$  das Maximum von  $f''$  auf  $U_\varepsilon(\xi)$ . Wenn wir sicherstellen, dass  $x_n$  in der Umgebung  $U_\varepsilon(\xi)$  bleibt, so erhalten wir die quadratische Fehlerabschätzung

$$\varphi(n+1) = |x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{\delta} |x_n - \xi|^2 = \frac{M}{\delta} (\varphi(n))^2.$$

Wenn nötig, verkleinern wir  $\varepsilon$  so weit, dass  $\varepsilon \frac{M}{\delta} \leq 1$  ist. Dann gilt

$$|x_n - \xi| \leq \varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} - \xi| \leq \varepsilon \varepsilon \frac{M}{\delta} \leq \varepsilon,$$

sodass alle  $x_n$  in  $U_\varepsilon(\xi)$  liegen, wenn nur der Startwert  $x_0$  in  $U_\varepsilon(\xi)$  liegt. Damit ist obige quadratische Fehlerabschätzung gültig.  $\square$

**Beispiel:** Zur Berechnung der Nullstelle  $\xi = \sqrt[3]{2}$  von  $x^3 - 2 = 0$  wurde das Bisektionsverfahren und das Newtonverfahren mit Startwert  $x_0 = 2$  verwendet. Die Intervallgrenzen  $[a_n, b_n]$  bzw. die Näherungswerte  $x_n$  sind in Tabelle 1 bzw. Tabelle 2 angeführt.

n	$a_n$	$b_n$	Fehler
1	-2.000000000000000	2.000000000000000	4.000000000000000
2	0.000000000000000	2.000000000000000	2.000000000000000
3	1.000000000000000	2.000000000000000	1.000000000000000
4	1.000000000000000	1.500000000000000	0.500000000000000
5	1.250000000000000	1.500000000000000	0.250000000000000
6	1.250000000000000	1.375000000000000	0.125000000000000
7	1.250000000000000	1.312500000000000	0.062500000000000
8	1.250000000000000	1.281250000000000	0.031250000000000
9	1.250000000000000	1.265625000000000	0.015625000000000
10	1.257812500000000	1.265625000000000	0.007812500000000
11	1.257812500000000	1.261718750000000	0.003906250000000
12	1.259765625000000	1.261718750000000	0.001953125000000
13	1.259765625000000	1.260742187500000	0.000976562500000
14	1.259765625000000	1.260253906250000	0.000488281250000
15	1.259765625000000	1.260009765625000	0.000244140625000
16	1.259887695312500	1.260009765625000	0.000122070312500
17	1.259887695312500	1.259948730468750	0.000061035156250
18	1.259918212890630	1.259948730468750	0.000030517578130
19	1.259918212890630	1.259933471679690	0.000015258789060
20	1.259918212890630	1.259925842285160	0.000007629394530

Tabelle 1: Bisektionsverfahren zur Berechnung von  $\sqrt[3]{2}$ .

n	$x_n$	Fehler
1	2.000000000000000	0.740078950105130
2	1.500000000000000	0.240078950105130
3	1.296296296296300	0.036375246401420
4	1.260932224741750	0.001011174846880
5	1.259921860565930	0.000000810671050
6	1.259921049895390	0.000000000000050
7	1.259921049894870	0.000000000000000
8	1.259921049894870	0.000000000000000

Tabelle 2: Newtonverfahren zur Berechnung von  $\sqrt[3]{2}$ .

Das Newtonverfahren erreicht den Wert

$$\sqrt[3]{2} = 1.25992104989487$$

auf 14 Nachkommastellen genau bereits bei der 7. Iteration. Die Fehlerkurve in halblogarithmischer Darstellung ist in Abbildung 2 abzulesen.

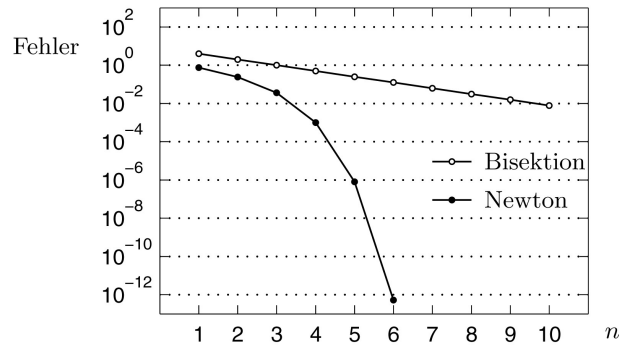


Abbildung 2: Fehler des Bisektions- und des Newtonverfahrens.

**Bemerkung:** Das Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens hängt davon ab, ob die Bedingungen obigen Satzes erfüllt sind. Ist der Startwert  $x_0$  zu weit von der Nullstelle  $\xi$  entfernt, so kann es zu Divergenz, Oszillationen oder Konvergenz zu einer anderen Nullstelle kommen. Ist  $f'(\xi) = 0$ , besitzt die Nullstelle  $\xi$  also eine Vielfachheit  $> 1$ , so reduziert sich die Konvergenzordnung des Newtonverfahrens.

Für genauere Ausführungen verweisen wir auf den Abschnitt 8.2 des Lehrbuchs

M. Oberguggenberger, A. Ostermann: Analysis für Informatiker. Springer-Verlag, Berlin 2005.