

Riemannsummen

Im Riemann'schen Zugang wird das Integral einer reellwertigen Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ als Grenzwert von *Riemannsummen* eingeführt. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Man nimmt Teilungspunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

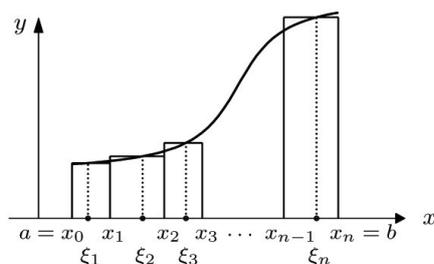
Die Intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ bilden eine *Zerlegung* Z des Intervalls $[a, b]$. Ihre *Feinheit* $\Phi(Z)$ ist die Länge des größten Teilintervalls:

$$\Phi(Z) = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|.$$

Wählt man nun beliebige Zwischenpunkte $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, so nennt man

$$S = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

eine *Riemannsumme*. Graphisch - bei nichtnegativen Funktionen f - bedeutet dies die Annäherung der Fläche unter dem Funktionsgraphen durch Rechtecke:



Um das Riemann-Integral einzuführen, nehmen wir eine Folge Z_1, Z_2, Z_3, \dots von Zerlegungen, deren Feinheit $\Phi(Z_N) \rightarrow 0$ geht für $N \rightarrow \infty$, und zugehörige Riemannsummen S_N .

Definition: Eine Funktion f heißt auf $[a, b]$ *Riemann-integrierbar*, falls für beliebige Folgen von Zerlegungen $(Z_N)_{N \geq 1}$ mit $\Phi(Z_N) \rightarrow 0$ die zugehörigen Riemannsummen $(S_N)_{N \geq 1}$ gegen denselben Grenzwert $I(f)$ streben. Dieser Grenzwert

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

heißt das *bestimmte Integral* von f auf $[a, b]$.

Die Teilungspunkte x_j der Zerlegung, wie auch die Zwischenpunkte ξ_j , können beliebig gewählt werden (die Längen $[x_{j-1}, x_j]$ der Teilintervalle können unterschiedlich groß sein). Im Falle der Riemann-Integrierbarkeit der Funktion f ist die Riemannsumme eine umso bessere Näherung an das Integral, je feiner die Zerlegung ist. Zu beachten ist, dass Integrale positiver Funktionen positiv und negativer Funktionen negativ sind; Teilrechtecke gehen in die Riemannsumme mit negativem Wert ein, wenn $f(\xi_j) < 0$ ist, ansonsten mit positivem Wert.

Das Applet bietet die Möglichkeit, die Teilungspunkte zufällig wählen zu lassen oder äquidistant. Die Zwischenpunkte und die Intervallgrenzen können von Hand verschoben werden. Für genauere Ausführungen verweisen wir auf die Erläuterungen zum Applet *Integration* sowie auf den Abschnitt 11 des Lehrbuchs