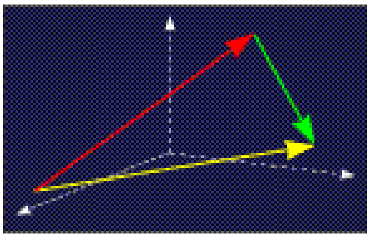
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Quadratische Funktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum behandelt die Funktionsterme, Graphen und wichtigsten Eigenschaften quadratischer Funktionen.

1 Quadratische Funktionen

Eine reelle **quadratische Funktion** ist eine reelle Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c \tag{1.1}$$

ist, wobei a, b und c fix vorgegebene reelle Zahlen (Konstanten[1]) sind und $a \neq 0$ ist. Mit anderen Worten: Der Funktionsterm einer quadratischen Funktion ist ein Polynom zweiten Grades (weshalb quadratische Funktionen auch **Polynomfunktionen zweiten Grades**[2] genannt werden). Die größtmögliche Definitionsmenge einer reellen quadratischen Funktion ist ganz $\mathbb{R}$. Bei Bedarf kann die Definitionsmenge natürlich als echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ festgelegt werden.

Mit quadratischen Termen und quadratischen Gleichungen haben Sie sicher schon Bekanntschaft gemacht[3]. Einige der Rechentechniken, die Sie dabei gelernt haben, werden nun bei der Diskussion quadratischer Funktionen benötigt, und einige der Sachverhalte, die Sie bereits kennen, werden in diesem Skriptum um weitere Gesichtspunkte ergänzt, insbesondere was die Graphen quadratischer Funktionen betrifft. Wir beginnen damit, einige Grundeigenschaften quadratischer Funktionen, die durch Untersuchung der Funktionsterme erschlossen werden können, zu besprechen.

[1] Auch *Parameter* oder *Koeffizienten* genannt.

[2] Siehe dazu das Skriptum *Polynome*. Eine Funktion mit Zuordnungsvorschrift (1.1) und $a = 0$ ist eine lineare Funktion. Für lineare Funktionen siehe das Skriptum *lineare Funktionen und ihre Graphen*.

[3] Zu letzteren siehe das Skriptum *quadratische Gleichungen*.

2 Extrema und Monotonieverhalten quadratischer Funktionen

Jede quadratische Funktion f (mit Zuordnungsvorschrift vom Typ (1.1) und Definitionsmenge $\mathbb{R}$) besitzt einen Bereich, in dem ihre Funktionswerte bei wachsendem x ebenfalls wachsen und einen Bereich, in dem ihre Funktionswerte bei wachsendem x fallen, d.h. kleiner werden. Die einfachste quadratische Funktion ist durch

$$g(x) = x^2 \tag{2.1}$$

definiert. Sehen wir uns ihr Verhalten an: Ein Blick auf die Funktionswerte

$$\begin{aligned} g(-3) &= 9 && (2.2)\\ g(-2) &= 4 && (2.3)\\ g(-1) &= 1 && (2.4)\\ g(0) &= 0 && (2.5)\\ g(1) &= 1 && (2.6)\\ g(2) &= 4 && (2.7)\\ g(3) &= 9 && (2.8) \end{aligned}$$

zeigt, dass die Funktionswerte mit zunehmendem x

- im Bereich negativer x-Werte kleiner werden (wir nennen die Funktion g in diesem Bereich daher *monoton fallend*)
- und im Bereich positiver x-Werte größer werden (wir nennen die Funktion g in diesem Bereich daher *monoton wachsend*)[4].

An der Stelle $x = 0$ nimmt die Funktion ihr Minimum an. Ihr Funktionswert ist dort 0. An keiner anderen Stelle wird dieser Wert angenommen oder unterschritten.

Sehen wir uns zum Vergleich die durch

$$h(x) = -x^2 \tag{2.9}$$

definierte quadratische Funktion an: Ein Blick auf die Funktionswerte

$$\begin{aligned} h(-3) &= -9 && (2.10)\\ h(-2) &= -4 && (2.11)\\ h(-1) &= -1 && (2.12)\\ h(0) &= 0 && (2.13)\\ h(1) &= -1 && (2.14)\\ h(2) &= -4 && (2.15)\\ h(3) &= -9 && (2.16) \end{aligned}$$

[4] Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

zeigt, dass h im Bereich negativer x-Werte monoton wachsend und im Bereich positiver x-Werte monoton fallend ist. An der Stelle $x = 0$ nimmt diese Funktion ihr Maximum an. Ihr Funktionswert ist dort 0, und an keiner anderen Stelle wird dieser Wert angenommen oder überschritten.

Ganz allgemein zeigt *jede* quadratische Funktion vom Typ (1.1) ein analoges Verhalten. Sehen wir uns das anhand des etwas komplizierteren Beispiels

$$q(x) = 3\,x^2 + 5\,x + 7 \tag{2.17}$$

an! Wir ergänzen den Funktionsterm auf ein vollständiges Quadrat[5]. Dazu heben wir zuerst aus den ersten beiden Summanden den Koeffizienten von x^2, also die Zahl 3, heraus:

$$3\,x^2 + 5\,x + 7 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}\,x\right) + 7. \tag{2.18}$$

Dem in der Klammer auftretenden Term $x^2 + \frac{5}{3}\,x$ „fehlt" zu einem vollständigen Quadrat nur mehr ein Anteil $\left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2$. Davon können Sie sich leicht selbst überzeugen, indem Sie mit der ersten binomischen Formel[6] berechnen:

$$\left(x + \frac{5}{2\cdot 3}\right)^2 = \underbrace{x^2 + 2\,x\cdot\frac{5}{2\cdot 3}}_{x^2 + \frac{5}{3}\,x} + \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2 = x^2 + \frac{5}{3}\,x + \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2. \tag{2.19}$$

Um also $x^2 + \frac{5}{3}\,x$ in die Form „Quadrat eines linearen Terms + eine Zahl" zu bringen, können wir $\left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2$ addieren und gleich wieder subtrahieren:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5}{3}\,x &= \underbrace{x^2 + \frac{5}{3}\,x + \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2}_{\left(x + \frac{5}{2\cdot 3}\right)^2} - \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2 = \\ &= \left(x + \frac{5}{2\cdot 3}\right)^2 - \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Das setzen wir nun in (2.18) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^2 + 5\,x + 7 &= 3\left(\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) + 7 = \\ &= 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - 3\cdot\frac{25}{36} + 7 = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{12}\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

[5] Dabei gehen wir ähnlich vor, wie es im Skriptum *Quadratische Gleichungen* vorgeführt worden ist.
[6] Siehe das Skriptum *Identitäten*.

Damit können wir unsere Funktion q statt wie in (2.17) auch in der Form

$$q(x) = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{12} \tag{2.22}$$

anschreiben. In dieser Form lässt sich ihr Verhalten leichter ablesen als mit dem ursprünglich angegebenen Funktionsterm (2.17). Ist $x = -\frac{5}{6}$, so ist $3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = 0$, d.h. der Funktionswert ist an dieser Stelle durch $q(-\frac{5}{6}) = \frac{59}{12}$ gegeben. An jeder *anderen* Stelle ist der Funktionswert größer (da ja dann noch eine positive Zahl addiert wird), was nichts anderes besagt, als dass die Funktion an der Stelle $x = -\frac{5}{6}$ ihr Minimum annimmt. Weiters gilt:

- Wir nehmen ein x im Bereich $x + \frac{5}{6} < 0$, d.h. $x < -\frac{5}{6}$. Wird es geringfügig vergrößert, so wächst auch $x + \frac{5}{6}$, was bedeutet, dass $x + \frac{5}{6}$ näher zum Nullpunkt rückt. (Nicht vergessen: von $x + \frac{5}{6}$ haben wir angenommen, dass es negativ ist!) Daher werden die Funktionswerte kleiner. In diesem Bereich ist die Funktion q also monoton fallend.
- Wir nehmen ein x im Bereich $x + \frac{5}{6} > 0$, d.h. $x > -\frac{5}{6}$. Wird es vergrößert, so wächst auch $x+\frac{5}{6}$, was nun bedeutet, dass $x+\frac{5}{6}$ vom Nullpunkt weg rückt. (Nicht vergessen: von $x+\frac{5}{6}$ haben wir nun angenommen, dass es positiv ist!) Daher werden die Funktionswerte größer. In diesem Bereich ist die Funktion q also monoton wachsend.

Wieder zeigt sich das Bild: Die Funktion besitzt eine *Extremstelle*[7] (in diesem Beispiel die Minimumstelle $-\frac{5}{6}$). Diese teilt die Zahlengerade in zwei Bereiche, in denen die Funktion jeweils monoton ist – in einem monoton fallend, im anderen monoton wachsend.

Um sich zu vergewissern, dass dieses Verhalten bei *jeder* quadratischen Funktion auftritt, kann der Term einer allgemeinen quadratischen Funktion, wie in (1.1) angegeben, genauso behandelt werden, wie wir es soeben anhand des Beispiels (2.17) durchgeführt haben. Kompakt angeschrieben, sieht die entsprechende Umformung so aus:

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sie können diese Rechnung auch von hinten aufzäumen, von $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ ausgehen, das Quadrat mit Hilfe der ersten binomischen Formel ausmultiplizieren und sich davon überzeugen, dass genau $a\,x^2 + b\,x + c$ herauskommt!

[7] Eine *Extremstelle* einer Funktion ist eine Stelle, die entweder eine *Minimumstelle* oder eine *Maximumstelle* ist. Alle in diesem Skriptum auftretenden Extremstellen sind *globale* Extremstellen (*globale* Minimumstellen bzw. *globale* Maximumstellen). Man sagt auch oft kurz, dass eine Funktion an einer Stelle ein *Extremum* (*Minimum* oder *Maximum*) hat (bzw. annimmt). Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

Mit dem wichtigen Ergebnis (2.23) können wir nun einige **für beliebige quadratische Funktionen geltende Aussagen** machen: Die durch

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \tag{2.24}$$

(mit $a \neq 0$) definierte quadratische Funktion f besitzt an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein **Extremum**. Der Funktionswert an dieser Extremstelle ist durch

$$f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{b^2}{4a} + c \tag{2.25}$$

gegeben. Weiters gilt:

- Ist $a > 0$, so können die Funktionswerte nirgends kleiner sein als $-\frac{b^2}{4a} + c$, d.h. die Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ist eine **Minimumstelle**. Die Funktion ist dann im Bereich $x < -\frac{b}{2a}$ **monoton fallend** und im Bereich $x > -\frac{b}{2a}$ **monoton wachsend**.
- Ist $a < 0$, so können die Funktionswerte nirgends größer sein als $-\frac{b^2}{4a} + c$, d.h. die Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ist eine **Maximumstelle**. Die Funktion ist dann im Bereich $x < -\frac{b}{2a}$ **monoton wachsend** und im Bereich $x > -\frac{b}{2a}$ **monoton fallend**.

Um diese allgemeinen Aussagen für das zuvor betrachtete Beispiel (2.17) zu überprüfen, setzen Sie einfach $a = 3$, $b = 5$ und $c = 7$ ein. Die Extremstelle (da $a = 3 > 0$ ist, handelt es sich um eine Minimumstelle) ergibt sich zu $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2\cdot 3} = -\frac{5}{6}$, in Übereinstimmung mit dem bereits früher erhaltenen Resultat.

3 Nullstellen quadratischer Funktionen

An welchen Stellen ist der Funktionswert einer quadratischen Funktion gleich 0? Bezeichnen wir den Funktionsterm wieder mit $a\,x^2 + b\,x + c$, so sind die Nullstellen genau jene x-Werte, für die

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \tag{3.1}$$

gilt, also die Lösungen einer quadratischen Gleichung. Wie bereits im Skriptum über quadratische Gleichungen ausführlich besprochen, gibt es hinsichtlich der Zahl der Lösungen (im Rahmen der reellen Zahlen) drei Möglichkeiten:

- Manchmal gibt es keine Lösung. (Beispiel: $x^2 + 1 = 0$.)
- Manchmal gibt es eine einzige Lösung. (Beispiel: $x^2 = 0$. Die einzige Lösung ist $x = 0$.)
- Manchmal gibt es zwei Lösungen. (Beispiel: $x^2 - 1 = 0$. Die beiden Lösungen sind $x = -1$ und $x = 1$.)

Eine quadratische Funktion hat daher entweder keine Nullstelle oder eine Nullstelle oder zwei Nullstellen.

Um die Nullstellen zu finden, kann eine der beiden Lösungsformeln für quadratische Gleichungen verwendet werden. Ist $a = 1$, so bietet sich die „kleine Lösungsformel“ an. Ist $a \neq 1$, so kann entweder die „große Lösungsformel“ verwendet werden oder, nach Division durch a, ebenfalls die „kleine Lösungsformel“.

Wir können zur Bestimmung der Nullstellen aber auch das im vorigen Abschnitt erzielte Ergebnis (2.23) verwenden. Mit f wie in (2.24) definiert, sind die Nullstellen jene x-Werte, die die Gleichung

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \tag{3.2}$$

erfüllen. Addieren wir auf beiden Seiten $\frac{b^2}{4a}-c$, so nimmt die Gleichung die Form

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \tag{3.3}$$

an, und nach Division beider Seiten durch a (was wegen $a\neq 0$ möglich ist) vereinfacht sie sich zu

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\,, \tag{3.4}$$

was wir auch in der Form

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{3.5}$$

schreiben können. Auf der linken Seite steht ein Quadrat, und im Rahmen der reellen Zahlen ist ein Quadrat immer ≥ 0. Wie es weiter geht, hängt daher von der rechten Seite ab. Deren Nenner ist immer positiv, aber der Zähler, b^2-4ac, kann negativ, 0 oder positiv sein. Damit ergibt sich:

- Ist $b^2-4ac<0$, so ist die linke Seite von (3.5) stets größer-gleich Null, die rechte Seite aber negativ. Das kann kein x erfüllen – die Funktion besitzt keine Nullstelle.
- Ist $b^2-4ac=0$, so reduziert sich (3.5) auf die Aussage $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, daher $x+\frac{b}{2a}=0$. In diesem Fall besitzt die Funktion genau eine Nullstelle, nämlich $x=-\frac{b}{2a}$.
- Ist $b^2-4ac>0$, so ist die rechte Seite von (3.5) positiv, sodass wir aus ihr die Wurzel ziehen können. Es ist dann $x+\frac{b}{2a}$ entweder gleich $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$ oder gleich $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$. (Die Betragsstriche rühren daher, dass $\sqrt{a^2}=|a|$ ist.) Da aber $|a|$, je nach dem Vorzeichen von a, entweder $-a$ oder a ist, ist $x+\frac{b}{2a}$ entweder gleich $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ oder gleich $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. In diesem Fall besitzt die Funktion also zwei Nullstellen, die wir gemeinsam in der Form $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ anschreiben können.

Im Grunde haben wir mit dieser Argumentation nichts anderes gemacht, als die „große Lösungsformel“ für quadratische Gleichungen noch einmal herzuleiten!

Es gibt eine interessante Beziehung zwischen den Nullstellen und der Extremstelle einer quadratischen Funktion:

- Besitzt eine quadratische Funktion der Form (2.24) genau eine Nullstelle, so ist diese mit der Extremstelle identisch. Beispiel: Mit $a=1$ und $b=c=0$ ist $f(x)=x^2$. Die einzige Nullstelle ($x=0$) ist genau jene Stelle, an der f ihr Minimum annimmt.

- Besitzt eine quadratische Funktion der Form (2.24) zwei Nullstellen, so sind diese durch $-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ gegeben. Ihre Summe ist daher gleich $-\frac{b}{a}$ (die beiden Terme mit den Wurzeln fallen aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen weg). Ihr Mittelwert[8] (die halbe Summe) ist daher gleich $-\frac{b}{2a}$, und das ist gerade die Extremstelle! Daher gilt ganz allgemein: Die Extremstelle ist gleich dem Mittelwert der beiden Nullstellen. Geometrisch ausgedrückt: Die Extremstelle liegt auf der Zahlengeraden genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, d.h. sie hat von ihnen den gleichen Abstand. Beispiel: Mit $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$ ist $f(x) = x^2 - 1$. Die Nullstellen sind $x = -1$ und $x = 1$. Genau in der Mitte liegt die Stelle $x = 0$, und das ist gerade jene Stelle, an der die Funktion ihren kleinsten Wert (nämlich -1) annimmt.

4 Graphen quadratischer Funktionen

Die bisher diskutierten Eigenschaften widerspiegeln sich in leicht erkennbarer Weise in den Graphen[9] quadratischer Funktionen. Beginnen wir mit der durch

$$g(x) = x^2 \tag{4.1}$$

definierten Funktion g, der einfachsten quadratischen Funktion, die wir oben in (2.1) bereits betrachtet haben. Die Liste ausgewählter Funktionswerte (2.2) – (2.8) zeigt ein für quadratische Funktionen typisches *nichtlineares* Verhalten. Gehen wir von der Minimumstelle 0 aus und vergrößern x, so wachsen die Funktionswerte $g(x)$ zuerst recht langsam, dann aber *stärker als linear*. Auf dem Weg von $x = 0$ bis $x = 1$ hat $g(x)$ um 1 zugenommen, auf dem Weg von $x = 1$ bis $x = 2$ beträgt der Zuwachs 3, auf dem Weg von $x = 2$ bis $x = 3$ beträgt der Zuwachs 5, und je weiter wir gehen, umso größer wird die Zunahme, wenn x um 1 erhöht wird. Beim Schritt von $x = 10$ auf $x = 11$ beträgt sie bereits $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$. Im Bereich negativer x verzeichnen wir ein analoges, aber „gespiegeltes" Verhalten. Fügen wir der Aufzählung noch einige Werte hinzu:

$$g(-0.5) = 0.25 \tag{4.2}$$
$$g(-0.1) = 0.01 \tag{4.3}$$
$$g(-0.01) = 0.0001 \tag{4.4}$$
$$g(0.01) = 0.0001 \tag{4.5}$$
$$g(0.1) = 0.01 \tag{4.6}$$
$$g(0.5) = 0.25 \tag{4.7}$$

Wir sehen, dass die Funktionswerte an Stellen, die in der Nähe der Minimumstelle 0 liegen, sehr klein sind. Das liegt daran, dass das Quadrieren den Betrag kleiner Zahlen nicht vergrößert, sondern verkleinert. So ist etwa das Quadrat von 0.1 gleich 0.01, also gleich einem Zehntel von 0.1. Der Graph der Funktion g ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Die Funktionswerte an den Stellen -2, -1, 0, 1 und 2 können sofort anhand des Koordinatenrasters überprüft werden,

[8] Der Mittelwert zweier Zahlen ist $\frac{\text{erste Zahl} + \text{zweite Zahl}}{2}$.

[9] Zur Erinnerung: Der Graph einer Funktion f ist die Menge aller Punkte der Zeichenebene mit Koordinaten $(x, f(x))$. Siehe dazu das Skriptum *Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle*.

da sie alle ganzzahlig sind. Betrachten Sie den Graphen und überprüfen Sie, dass die Punkte $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ und $(2,4)$ auf ihm liegen! Den Wertepaaren (4.2) und (4.7) entsprechen die Punkte $(-0.5, 0.25)$ und $(0.5, 0.25)$. Man kann zumindest näherungsweise erkennen, dass sie auf dem Graphen liegen.

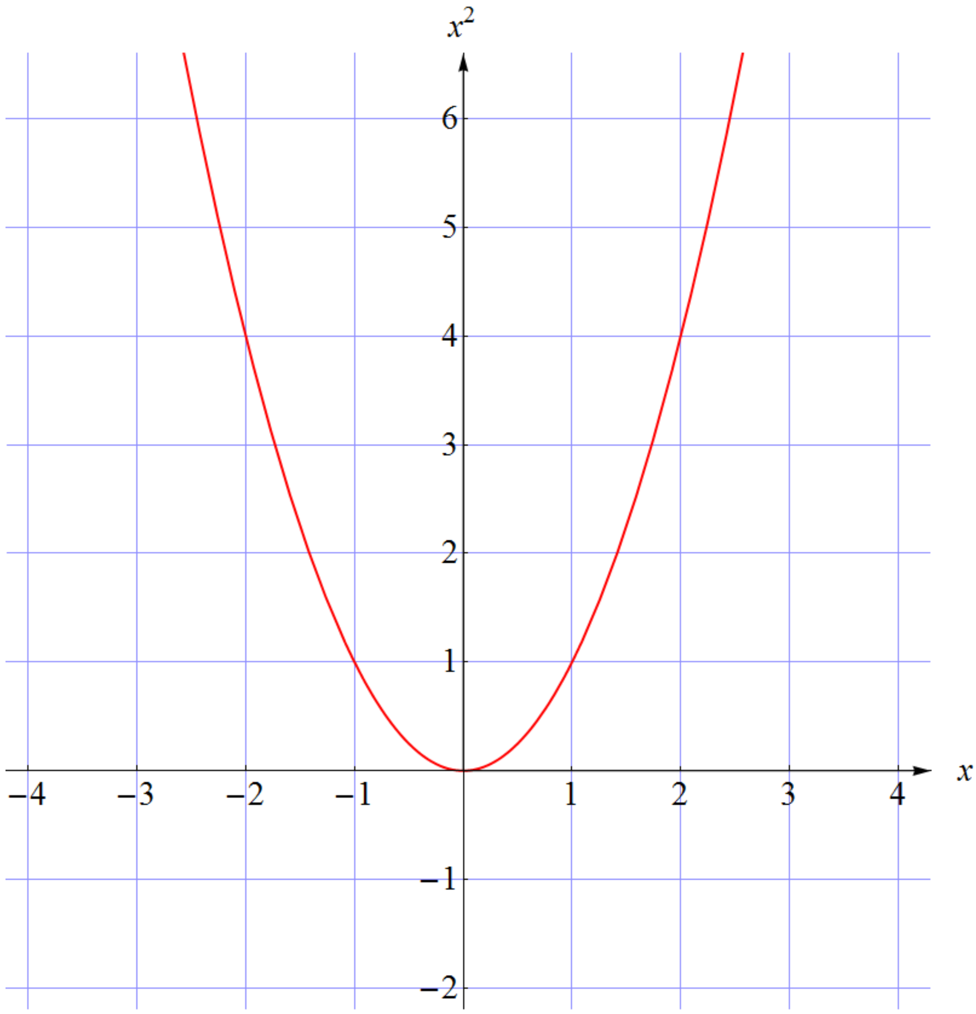


Abbildung 1: Graph der Funktion $g(x) = x^2$. Er wird auch *Normparabel* genannt.

Gehen wir die wichtigsten Charakteristika der Funktion bzw. des Graphen durch:

- Der Graph geht durch den Ursprung $(0,0)$, und alle seine anderen Punkte liegen oberhalb der ersten Achse[10] (x-Achse). Das entspricht der Tatsache, dass $g(x) = x^2 \geq 0$ für alle reellen x und dass der Funktionswert lediglich an der Stelle 0 gleich 0 ist. Wegen $x^2 > 0$ für alle reellen $x \neq 0$ ist der Funktionswert an allen anderen Stellen positiv.
- Der Punkt $(0,0)$ ist der „tiefste" Punkt des Graphen. Das entspricht der Tatsache, dass die Funktion g an der Stelle 0 ihr Minimum annimmt. Der kleinste Funktionswert ist 0.

[10] Da die Variable im allgemeinen Fall nicht x heißen muss, werden wir im Folgenden die Koordinatenachsen als „erste Achse" und „zweite Achse" bezeichnen. Um die Sprache nicht unnötig zu verkomplizieren, sprechen wir aber weiterhin von x-Werten und x-Koordinaten.

An keiner von 0 verschiedenen Stelle ist der Funktionswert kleiner als dieser Minimalwert.

- Links von der zweiten Achse fällt der Graph mit zunehmendem x ab, rechts von ihr steigt er mit zunehmendem x an. Das entspricht dem bereits diskutierten Monotonieverhalten: Im Bereich negativer x ist g monoton fallend, im Bereich positiver x ist g monoton wachsend.
- In der Nähe der Minimumstelle 0 „schmiegt" sich der Graph an die erste Achse. Er hat dort keinen Knick, sondern verläuft ganz „glatt". Das entspricht der Tatsache, dass die Funktionswerte, wie die Aufzählung (4.2) – (4.7) zeigt, in der Nähe der Stelle 0 sehr klein sind.
- Wandert x, von 0 ausgehend, nach rechts, so steigt der Graph immer steiler an. Dieses nichtlineare Verhalten geht aus der Aufzählung (2.2) – (2.8) hervor. Abbildung 1 zeigt natürlich nur einen Ausschnitt der Zeichenebene und damit nur einen Teil des Graphen. Man kann sich aber leicht vorstellen, wie er in noch größeren Ausschnitten aussieht: Seine beiden hochgereckten „Arme" werden immer steiler, je mehr man von ihnen sieht.
- Der Graph ist symmetrisch bezüglich der zweiten Achse. Wird er an der zweiten Achse gespiegelt, so geht er in sich selbst über. Das entspricht der Tatsache, dass für jedes x die Funktionswerte $g(-x) = (-x)^2$ und $g(x) = x^2$ übereinstimmen[11].

Der in Abbildung 1 gezeigte Graph ist ein Spezialfall einer *Parabel*. Er wird auch *Normparabel* genannt. Ganz allgemein ist eine Parabel eine Kurve, die aus der Normparabel durch Dehnung oder Stauchung in Richtung der Koordinatenachsen, Verschiebung und Drehung hervorgeht. Jede Parabel besitzt eine Symmetrieachse, und jener Punkt, in dem sie ihre Symmetrieachse schneidet, heißt **Scheitelpunkt** oder kurz **Scheitel**. Bei der in Abbildung 1 dargestellten Normparabel liegt der Scheitel im Ursprung, d.h. seine erste Koordinate (x-Koordinate) fällt mit der Minimumstelle zusammen.

Wir gehen nun von unserer einfachen Funktion (4.1) zu allgemeinen quadratischen Funktionen über und formulieren gleich das Hauptresultat der nachfolgenden Überlegungen:

> **Der Graph jeder quadratischen Funktion ist eine Parabel**. Er kann aus der Normparabel durch eine oder mehrere der Operationen
>
> - Dehnung oder Stauchung in Richtung der zweiten Achse (oder, was das Gleiche bewirkt, Stauchung oder Dehnung in Richtung der ersten Achse)
> - Verschiebung
> - Spiegelung an einer zur ersten Achse parallelen Geraden (oder, was das Gleiche bewirkt, Drehung um 180°)
>
> gewonnen werden.

Die **Symmetrieachse** jeder dieser als Graphen quadratischer Funktionen auftretenden Parabeln ist parallel zur zweiten Achse. Der Scheitelpunkt ist stets der „höchstliegende" bzw.

[11] Eine Funktion f mit der Eigenschaft, dass $f(-x) = f(x)$ für alle x, wird auch *gerade Funktion* genannt. Mehr dazu finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

„tiefstliegende“ Punkt des Graphen, d.h. die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist gleich der **Extremstelle** (also gleich der Maximum- bzw. Minimumstelle). Je nachdem, ob der Graph die erste Achse in keinem, einem[12] oder zwei Punkten schneidet, hat die entsprechende Funktion keine, eine oder zwei **Nullstellen**.

Um all das einzusehen, betrachten wir schrittweise kompliziertere Funktionsterme quadratischer Funktionen:

- **Graphen von Funktionen der Form** $f(x) = a\,x^2$:

  Beispiel 1: Die durch $f_2(x) = 2\,x^2$ definierte Funktion f_2. Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in blauer Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (in Abbildung 2 als Graph der Funktion f_1 in roter Farbe dargestellt) durch eine Dehnung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 hervor und ist „schlanker“ als die Normparabel[13]. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_2 doppelt so groß wie jener von f_1. Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_2(1) = 2$, während $f_1(1) = 1$.

  Beispiel 2: Die durch $f_3(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ definierte Funktion f_3. Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in grüner Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel durch eine Spiegelung an der ersten Achse und eine Stauchung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ hervor und ist „breiter“ als die Normparabel. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_3 gleich $-\frac{1}{2}$ mal jenem von f_1. Die Spiegelung kommt durch das Minuszeichen im Funktionsterm zustande. Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_3(1) = -\frac{1}{2}$, während $f_1(1) = 1$, und $f_3(2) = -2$, während $f_1(2) = 4$.

  Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = a\,x^2$, indem wir die Normparabel um den Faktor $|a|$ in Richtung der zweiten Achse dehnen (falls $|a| > 1$) oder stauchen (falls $|a| < 1$) und, falls $a < 0$ ist, eine Spiegelung an der ersten Achse durchführen.

- **Graphen von Funktionen der Form** $f(x) = x^2 + c$:

  Beispiel: Die durch $f_4(x) = x^2 + 2$ definierte Funktion f_4. Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in brauner Farbe) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (Graph von f_1) durch eine Verschiebung in Richtung der zweiten Achse um 2 hervor. An jeder Stelle ist der Funktionswert von f_4 um 2 größer als jener von f_1. Überprüfen Sie das in der Abbildung anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_4(0) = 2$, während $f_1(0) = 0$, und $f_4(1) = 3$, während $f_1(1) = 1$.

[12] Die Bezeichnung „schneiden“ bezieht sich hier auf die Durchschnittsmenge („Schnittmenge“) von Graph und erster Achse. Besteht diese Menge nur aus einem Punkt, so *berührt* der Graph die erste Achse, wie es etwa für die in Abbildung 1 gezeigte Funktion der Fall ist.

[13] Kleine Nebenbemerkung: Eine Dehnung um den Faktor 2 in Richtung der zweiten Achse macht aus der Normparabel das Gleiche wie eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Richtung der ersten Achse. Begründung: Ist (x, x^2) ein Punkt auf dem Graphen der Normparabel, so sind sowohl $(x, 2x^2)$ als auch $(\frac{x}{\sqrt{2}}, x^2)$ Punkte auf dem Graphen von f_2. Sie können das auch durch einen Vergleich des blauen mit dem roten Graphen in Abbildung 2 näherungsweise erkennen.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = x^2 + c$, indem wir die Normparabel um c in Richtung der zweiten Achse verschieben. Ist $c > 0$, so entspricht das einer Verschiebung nach „oben", ist $c < 0$, so entspricht es einer Verschiebung nach „unten".

- **Graphen von Funktionen der Form** $f(x) = (x + d)^2$:

  Beispiel: Die durch $f_5(x) = (x + 2)^2$ definierte Funktion f_5. Ihr Graph ist in Abbildung 2 (in magenta) gezeigt. Er geht aus der Normparabel (Graph von f_1) durch eine Verschiebung in Richtung der ersten Achse um -2 hervor. Warum? Weil für jede Stelle x gilt: $f_5(x) = (x + 2)^2 = f_1(x + 2)$. Der Funktionswert von f_5 an einer Stelle x ist gleich dem Funktionswert von f_1 an der Stelle $x + 2$, also an jener Stelle, die um 2 „rechts" von x liegt. Genau das entspricht einer Verschiebung um -2 in Richtung der ersten Achse! Als weiteren Check dieses Sachverhalts vermerken wir, dass der Funktionsterm $(x + 2)^2$ am kleinsten ist, wenn $x = -2$ ist. Die Funktion f_5 besitzt daher an der Stelle $x = -2$ ein Minimum, in Übereinstimmung mit dem in Abbildung 2 gezeigten Graphen. Überprüfen Sie die Lage des Graphen von f_5 anhand einiger Funktionswerte: So ist $f_5(-3) = f_1(-1) = 1$, $f_5(-2) = f_1(0) = 0$, $f_5(-1) = f_1(1) = 1$ und $f_5(0) = f_1(2) = 4$.

  Allgemein erhalten wir den Graphen einer Funktion der Form $f(x) = (x + d)^2$, indem wir die Normparabel um $-d$ in Richtung der ersten Achse verschieben. Ist $d > 0$, so entspricht das einer Verschiebung nach „links", ist $d < 0$, so entspricht es einer Verschiebung nach „rechts".

- **Graphen allgemeiner quadratischer Funktionen,** $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$:
  Nun haben wir alle nötigen Informationen gesammelt, um Lage und Form der Graphen beliebiger quadratischer Funktionen zu erschließen. Dazu benutzen wir das früher erzielte Ergebnis (2.23), dass $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ auch in der Form

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \tag{4.8}$$

  geschrieben werden kann. Den Graphen einer solchen Funktion bekommen wir aus der Normparabel durch eine kombinierte Anwendung der zuvor besprochenen Operationen. Abbildung 3 zeigt zwei konkrete Beispiele:

  Beispiel 1: Die durch $f_6(x) = 2\,(x - 1)^2 - 3$ definierte Funktion f_6. Durch Ausmultiplizieren der Klammer können wir sie auch in der Form $f_6(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 1$ schreiben. Ihr Graph ist in Abbildung 3 (in blauer Farbe) gezeigt. Er geht durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen aus der Normparabel (Graph von f_1) hervor:

  – Eine Dehnung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 (was seine Form etwas schlanker macht als die Normparabel). Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2\,x^2$.

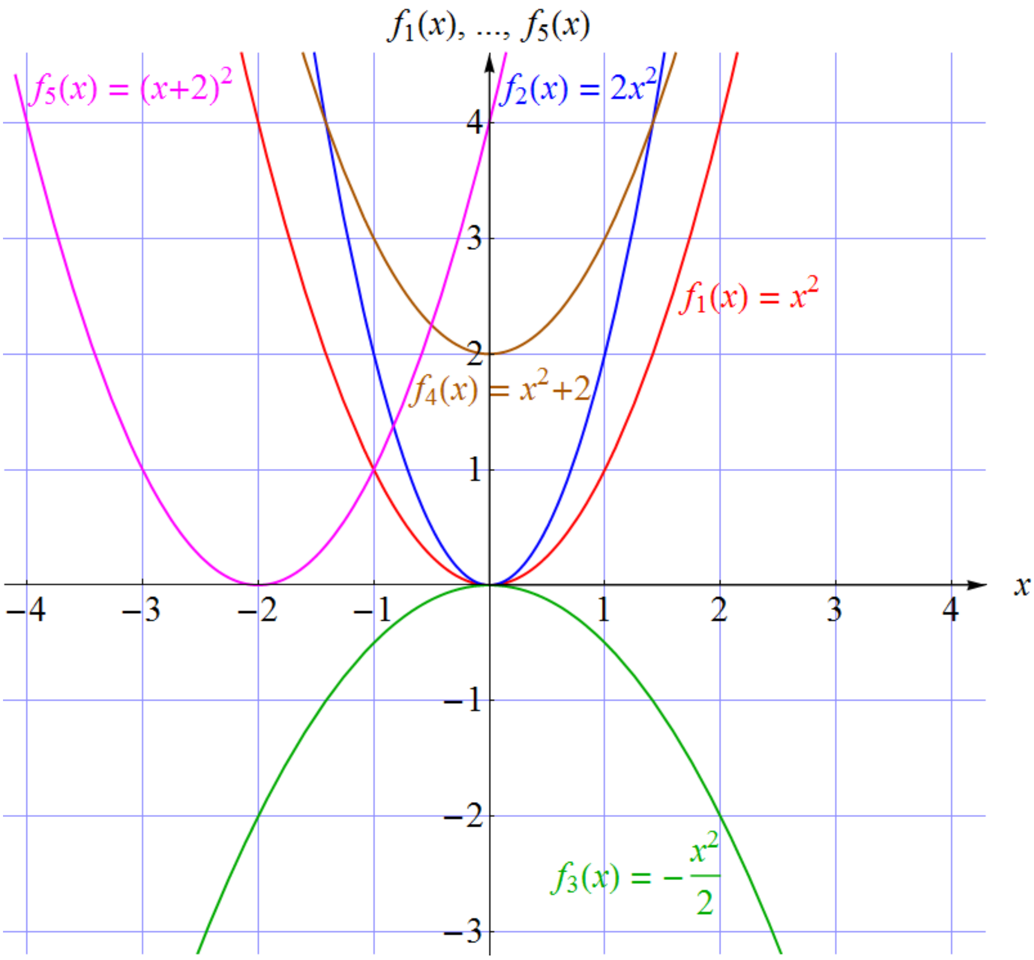


Abbildung 2: Graphen quadratischer Funktionen. Der Graph der Funktion f_1 (in roter Farbe) ist die in Abbildung 1 dargestellte Normparabel. Die Graphen der anderen Funktionen f_2 bis f_5 gehen, wie im Text diskutiert, durch einfache Operationen aus jenem von f_1 hervor.

– Eine Verschiebung um -3 in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2\,x^2 - 3$.
– Eine Verschiebung um 1 in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto 2\,(x-1)^2 - 3$, d.h. der Funktion f_6.

Da der Scheitel die letzten beiden Operationen mitgemacht hat, liegt er nun im Punkt $(1, -3)$. Aus der Lage des Graphen können nun auch die Nullstellen (näherungsweise) abgelesen werden: Sie sind die x-Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der ersten Achse. Zur Kontrolle berechnen wir sie: Die zwei Lösungen der Gleichung $2\,(x-1)^2 - 3 = 0$ ergeben sich sofort zu $x = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{6}\right)$, numerisch $x_1 \approx -0.22$ und $x_2 \approx 2.22$, was wir durch einen Blick auf Abbildung 3 näherungsweise verifizieren können.

Beispiel 2: Die durch $f_7(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4$ definierte Funktion f_7. Durch Ausmultiplizieren der Klammer können wir sie auch in der Form $f_7(x) =$

$-\frac{x^2}{2} - x + \frac{7}{2}$ schreiben. Ihr Graph ist in Abbildung 3 (in grüner Farbe) gezeigt. Er geht durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen aus der Normparabel (Graph von f_1) hervor:

- Eine Spiegelung an der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -x^2$.
- Eine Stauchung in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ (was seine Form etwas breiter macht als die Normparabel). Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$.
- Eine Verschiebung um 4 in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 4$.
- Eine Verschiebung um -1 in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)^2+4$, d.h. der Funktion f_7.

Da der Scheitel die letzten beiden Operationen mitgemacht hat, liegt er nun im Punkt $(-1, 4)$. Aus der Lage des Graphen können nun auch die Nullstellen (näherungsweise) abgelesen werden: Sie sind die x-Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der ersten Achse. Zur Kontrolle berechnen wir sie: Die zwei Lösungen der Gleichung $-\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4 = 0$ ergeben sich sofort zu $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$, numerisch $x_1 \approx -3.83$ und $x_2 \approx 1.83$, was wir durch einen Blick auf Abbildung 3 näherungsweise verifizieren können.

Allgemein erhalten wir den Graphen einer quadratischen Funktion f der Form (4.8) aus jenem der Normparabel durch folgende, in der angegebenen Reihenfolge ausgeführte Operationen:

- Falls $a < 0$ ist: eine Spiegelung an der ersten Achse. In diesem Fall bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto -x^2$. Ist $a > 0$, so unterbleibt dieser Schritt.
- Eine Dehnung (falls $|a| > 1$) oder Stauchung (falls $|a| < 1$) in Richtung der zweiten Achse um den Faktor $|a|$. Im ersten Fall wird der Graph schlanker als die Normparabel, im zweiten Fall wird er breiter. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto a\,x^2$.
- Eine Verschiebung um $-\frac{b^2}{4a} + c$ in Richtung der zweiten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto a\,x^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.
- Eine Verschiebung um $-\frac{b}{2a}$ in Richtung der ersten Achse. Damit bekommen wir den Graphen der Funktion $x \mapsto a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, d.h. der Funktion f.

Da der Scheitel diese Operationen mitmacht, liegt er nun im Punkt $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$. Ist $a > 0$, so ist seine x-Koordinate $-\frac{b}{2a}$ eine Minimumstelle. Ist $a < 0$, so ist sie eine Maximumstelle. Halten wir fest, wie die Parameter a, b und c den Graphen bestimmen:

- Ist $a > 0$, so ist der Graph eine „nach oben offene“ Parabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph eine „nach unten offene“ Parabel.

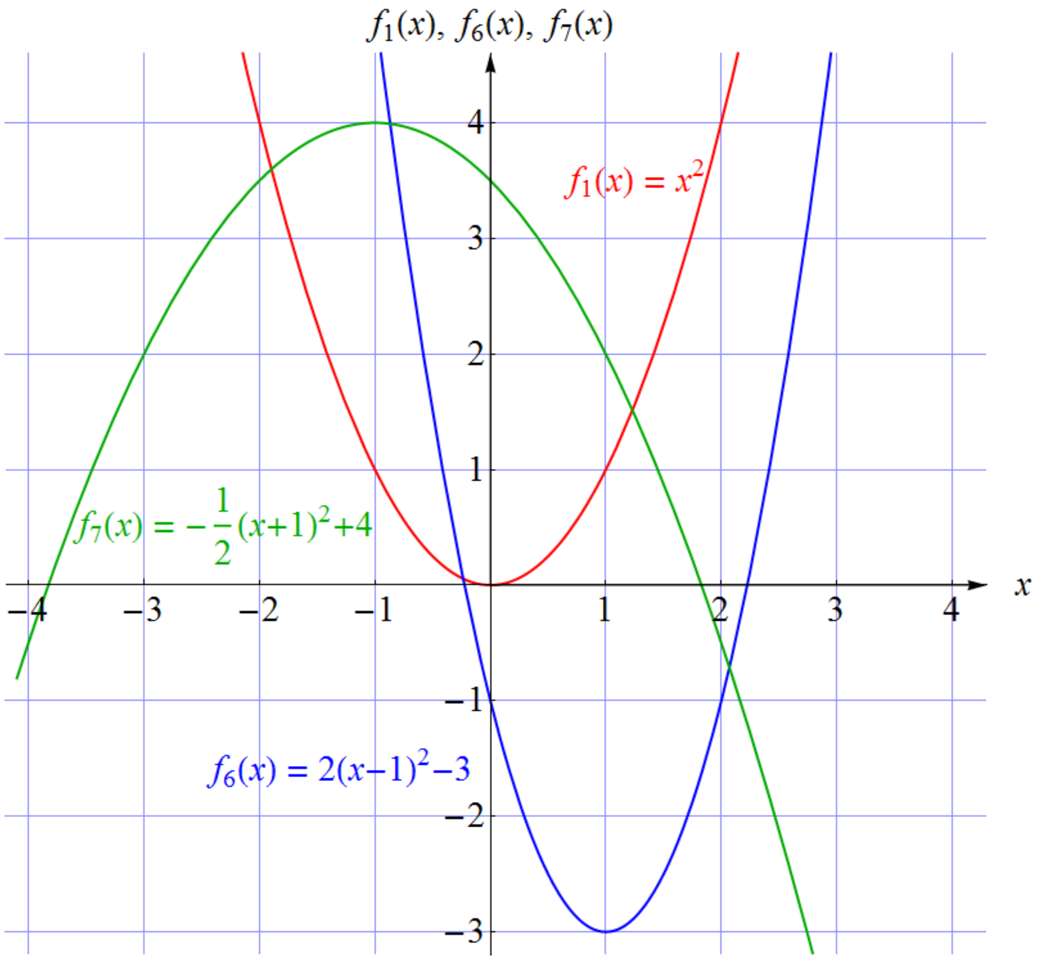


Abbildung 3: Graphen quadratischer Funktionen. Wie in Abbildung 2 ist der Graph der Funktion f_1 (in roter Farbe) die Normparabel. Die Graphen der beiden anderen Funktionen f_6 und f_7 gehen, wie im Text diskutiert, durch einfache Operationen aus ihm hervor.

– Die Form des Graphen wird durch $|a|$ bestimmt. Für $|a| > 1$ ist er schlanker, für $|a| < 1$ ist er breiter als die Normparabel.
– Die Kombinationen $-\frac{b}{2a}$ und $-\frac{b^2}{4a} + c$ bestimmen die Lage des Scheitels.

Um die Lage des Graphen einer in der Form $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ gegebenen Funktion zu finden, muss der Funktionsterm also entweder durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in die Form (4.8) gebracht werden, oder – was einfacher ist – es wird die Formel

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) \tag{4.9}$$

für die Koordinaten des Scheitels benutzt. Um rechnerisch zusätzliche Information über den Graphen zu erhalten, können noch zwei Schritte durchgeführt werden:

– Der Schnittpunkt des Graphen mit der zweiten Achse ergibt sich sehr einfach durch Berechnung des Funktionswerts an der Stelle $x = 0$. Im allgemeinen Fall ist er durch $(0, c)$ gegeben.

– Die Schnittpunkte des Graphen mit der ersten Achse werden durch die Nullstellen, d.h. durch die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ bestimmt. Aber Achtung: Falls der Graph zur Gänze „oberhalb" oder „unterhalb" der ersten Achse liegt, gibt es keine Nullstelle (wie etwa im Fall der Funktion f_4 in Abbildung 2). Falls der Graph die erste Achse berührt, gibt es nur eine Nullstelle (die x-Koordinate des Scheitels). Falls der Graph die erste Achse in zwei Punkten schneidet, so sind deren x-Koordinaten die Nullstellen. In diesem Fall ist aufgrund der symmetrischen Form der Parabeln klar, dass (wie bereits früher in diesem Skriptum besprochen) die x-Koordinate des Scheitels (d.h. die Extremstelle) genau der Mittelwert der beiden Nullstellen ist.

Natürlich können Sie einen Funktionsplotter (am PC oder auch als App am Tablet oder Smartphone) verwenden, um den Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion zeichnen zu lassen. Das ist praktisch, sollte aber das Verständnis dafür, *warum* der Graph der eingegebenen Funktion die gezeigte Form hat, nicht ersetzen, sondern fördern! (Zur Förderung des Verstehens durch einen Funktionsplotter finden Sie eine Übungsaufgabe am Ende dieses Skriptums.)

Nachdem wir nun ausführlich die Lage des Graphen einer gegebenen quadratischen Funktion besprochen haben, wenden wir uns noch dem **umgekehrten Problem** zu: Gegeben ist lediglich der Graph, und Sie sollen einen dazu passenden Funktionsterm finden oder aus einer vorgegebenen Liste den richtigen erkennen. Sind Sie in eine solche Situation gestellt, so können Sie eine Reihe von Methoden und Checks durchführen:

- Sollen Sie den richtigen aus einer Liste von Funktionstermen erkennen, so können Sie aus der Grafik Koordinaten von Punkten auf dem Graphen (etwa des Scheitels, der Schnittpunkte mit den Achsen, und, falls ein Koordinatenraster eingezeichnet ist, von Punkten mit ganzzahligen Koordinaten) ablesen und mit den entsprechenden, mit Hilfe der Funktionsterme errechneten Größen (Nullstellen, Koordinaten des Scheitels, ausgewählte Wertepaare $(x, f(x))$) vergleichen. So lassen sich in der Regel sehr schnell die nicht zutreffenden Funktionsterme ausscheiden.
- Eine etwas systematischere Vorgangsweise versucht, die Parameter a, b und c anhand des Graphen (zumindest näherungsweise) abzulesen:

  – Beginnen Sie mit dem Vorzeichen von a: Ist der Graph eine „nach oben offene" Parabel, so ist $a > 0$. Ist der Graph eine „nach unten offene" Parabel, so ist $a < 0$.
  – Um a abzulesen, gehen Sie vom Scheitel aus um 1 nach „rechts". Dann müssen Sie um a nach „oben" oder „unten" (je nach dem Vorzeichen von a) gehen, um wieder auf den Graphen zu gelangen[14]. Auf diese Weise können Sie a sozusagen „abmessen".
  – Lesen Sie die Koordinaten (s_x, s_y) des Scheitels ab und vergleichen Sie mit (4.9). Wenn Sie a bereits bestimmt haben, folgt $b = -2s_x a$ und damit $c = s_y + \frac{b^2}{4a} = s_y + {s_x}^2 a$.

[14] Die Begründung erfolgt am einfachsten mit einer Funktion vom Typ $f(x) = a\,x^2$. Es ist dann $f(0) = 0$ und $f(1) = a$. Versuchen Sie, dieses Argument für die allgemeine quadratische Funktion (4.8) zu verallgemeinern!

Am Ende dieses Abschnitts noch ein Hinweis: Bisher haben wir Funktionsterme quadratischer Funktionen entweder direkt durch die Koeffizienten in der Form (2.24) ausgedrückt oder, nach einer Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat, in der Form (4.8) angeschrieben. Sie sollten ohne große Probleme zwischen diesen beiden (gleichwertigen) Darstellungen wechseln, d.h. die eine in die andere umrechnen können. Manchmal sind quadratische Funktionen aber auch in der Form

$$f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2) \tag{4.10}$$

angegeben, wobei a, x_1 und x_2 reelle Zahlen sind. (Beispiel: $f(x) = 3\,(x-2)(x+5)$.) Bevor Sie einen solchen Funktionsterm ausmultiplizieren, um ihn auf die Form (2.24) zu bringen, bedenken Sie, dass die Form (4.10) viel Information beinhaltet: Die Zahl a stimmt mit dem Koeffizienten von x^2 überein (d.h. mit dem Parameter, den wir auch bisher mit a bezeichnet haben). Die Zahlen x_1 und x_2 sind die Nullstellen, denn klarerweise gilt $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Damit haben Sie auch die x-Koordinate des Scheitels, denn diese ist, wie wir bereits wissen, gleich dem Mittelwert $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ der Nullstellen. Die zweite Koordinate des Scheitels ist dann gleich dem entsprechenden Funktionswert. Für viele Zwecke reichen diese Informationen aus, um weiterzukommen. Es ist dann gar nicht nötig, einen in der Form (4.10) gegebenen Funktionsterm in eine andere Darstellung umzurechnen.

5 Schnittmengen der Graphen linearer und quadratischer Funktionen

Sind zwei lineare oder quadratische Funktionen f und g gegeben, so können wir fragen, ob es eine (oder mehrere) Stellen x gibt, an denen die Funktionswerte übereinstimmen, d.h. an denen

$$f(x) = g(x) \tag{5.1}$$

gilt. Ist eine der beiden Funktionen linear und eine quadratisch oder sind beide quadratisch, mit verschiedenen Koeffizienten von x^2, so stellt (5.1) eine quadratische Gleichung dar, die auch in der Form $f(x) - g(x) = 0$ angeschrieben werden kann. In geometrischer Hinsicht handelt es sich um das Problem, die Schnittmenge der Graphen, d.h. die Schnittmenge einer Geraden und einer Parabel bzw. zweier Parabeln zu finden. Sowohl aufgrund der allgemeinen Eigenschaften quadratischer Gleichungen als auch aufgrund der Parabelform ist klar, dass es keine, eine oder zwei Lösungen (d.h. Schnittpunkte) geben kann.

Beispiel: Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = 2\,x^2 - 3$ und $v(x) = -x^2 + x + 1$. Man berechne die Schnittpunkte ihrer Graphen!

Lösungsweg: Es sind jene x zu finden, die $u(x) = v(x)$ erfüllen, d.h. $2\,x^2 - 3 = -x^2 + x + 1$ oder, indem die rechte Seite von beiden Seiten subtrahiert wird,

$$3\,x^2 - x - 4 = 0. \tag{5.2}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{4}{3}$. (Führen Sie die Berechnung im Detail selbst durch!) Sie sind die x-Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte. Die zweiten Koordinaten der Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen in jeweils einen der beiden Funktionsterme: Mit $u(x_1) = u(-1) = 2\,(-1)^2 - 3 = -1$ ergibt sich der eine Schnittpunkt zu $S_1 = (-1, -1)$, und mit $u(x_2) = u(\frac{4}{3}) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 = \frac{5}{9}$ ergibt sich der andere Schnittpunkt zu $S_2 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{9})$.

Zur Probe kann noch jeweils der andere Funktionsterm herangezogen werden:

$$v(x_1) = v(-1) = -(-1)^2 + (-1) + 1 = -1 = \text{zweite Koordinate von } S_1 \ \checkmark$$
$$v(x_2) = v(\tfrac{4}{3}) = -\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + \tfrac{4}{3} + 1 = \tfrac{5}{9} = \text{zweite Koordinate von } S_2 \ \checkmark$$

Zeichnen Sie die beiden Funktionsgraphen (entweder mit dem Bleistift auf einem Blatt Papier oder mit Hilfe eines Funktionsplotters) und überprüfen Sie die Lage der Schnittpunkte!

6 Verhalten quadratischer Funktionen für große Argumente

Zum Abschluss machen wir noch einige Bemerkungen über das Verhalten quadratischer Funktionen für Argumente mit großem Betrag. Ist beispielsweise die Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 7x - 12 \tag{6.1}$$

gegeben, so können wir ihre Werte an Stellen mit sehr großem Betrag wie $x = 1$ Million $= 10^6$ oder $x = -1$ Million $= -10^6$ betrachten. So ist etwa

$$f(10^6) = 3 \cdot 10^{12} + 7 \cdot 10^6 - 12 = 3000000000000 + 7000000 - 12. \tag{6.2}$$

Wir sehen, dass der erste Summand den weitaus größten Teil der Summe ausmacht. Sein Anteil beträgt

$$\frac{3 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^{12} + 7 \cdot 10^6 - 12} \approx 0.999998, \tag{6.3}$$

also ganze 99.9998 Prozent! Ähnliches können wir auch an der Stelle $x = -10^6$ beobachten.

Ganz allgemein wird eine Funktion der Form

$$x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c \tag{6.4}$$

an Stellen x, deren Betrag hinreichend groß ist, vom quadratischen Term $a\,x^2$ dominiert. In diesem Sinn können wir schreiben:

$$a\,x^2 + b\,x + c \;\approx\; a\,x^2 \qquad \text{falls } |x| \text{ genügend groß ist.} \tag{6.5}$$

Das bedeutet nicht, dass dann die Differenz zwischen $a\,x^2 + b\,x + c$ und $a\,x^2$ klein wäre (sie ist $b\,x + c$ und wird, sofern $b \neq 0$ ist, an Stellen mit großem Betrag ebenfalls einen großen Betrag besitzen), aber es bedeutet, dass $a\,x^2$ den größten Teil von $a\,x^2 + b\,x + c$ ausmacht. Etwas präziser als (6.5) können wir formulieren:

$$\frac{a\,x^2}{a\,x^2 + b\,x + c} \;\approx\; 1 \qquad \text{falls } |x| \text{ genügend groß ist.} \tag{6.6}$$

Eine Spur blumiger, dafür aber einprägsamer, können wir diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Aus „sehr großer Entfernung betrachtet“ sieht der Graph *jeder* quadratischen Funktion aus wie der Graph einer Funktion vom Typ $x \mapsto a\,x^2$.

7 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Schreiben Sie den Term $x^2 - 6\,x + 2$ durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in der Form (4.8) an!
  Lösung:

$$(x-3)^2 - 7.$$

- Schreiben Sie den Term $3\,x^2 + 3\,x - \frac{1}{2}$ durch Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat in der Form (4.8) an!
  Lösung:

$$3\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}.$$

- Gegeben ist die quadratische Funktion $r(x) = -2\,x^2 - 5\,x + 3$. Berechnen Sie ihre Nullstellen!
  Lösung:

$$x_1 = -3,\ x_2 = \tfrac{1}{2}.$$

- Gegeben ist die quadratische Funktion $s(x) = 9\,x^2 + 6\,x - 13$. Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts ihres Graphen!
  Lösung:

$$S = \left(-\tfrac{1}{3}, -14\right).$$

- Bestimmen Sie – zuerst rechnerisch – die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $p(x) = x^2 + 2\,x - 3$ und $q(x) = 4\,x + 5$! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Plot!
  Lösung:

Die Schnittpunkte sind $S_1 = (-2, -3)$ und $S_2 = (4, 21)$.
Erstellen Sie den Plot selbst!

- Bestimmen Sie – zuerst rechnerisch – die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $p(x) = x^2 + 2\,x - 3$ und $r(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 7$! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Plot!
  Lösung:

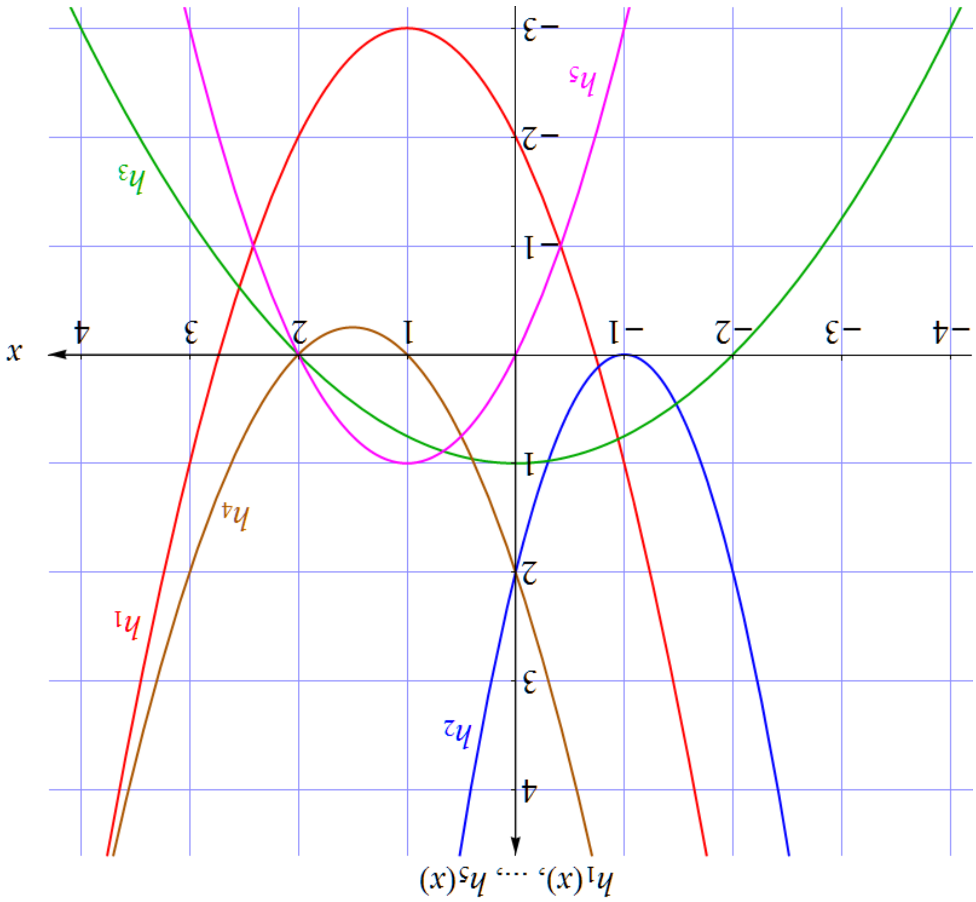
Die Schnittpunkte sind $S_1 = (-4, 5)$ und $S_2 = (1, 0)$.
Erstellen Sie den Plot selbst!

- Die Funktionen $h_1, \ldots, h_5$ sind gegeben durch

$$h_1(x) = x^2 - 2\,x - 2 \tag{7.1}$$
$$h_2(x) = 2\,(x+1)^2 \tag{7.2}$$
$$h_3(x) = -\frac{x^2}{4} + 1 \tag{7.3}$$
$$h_4(x) = (x-1)\,(x-2) \tag{7.4}$$
$$h_5(x) = -x^2 + 2\,x \tag{7.5}$$

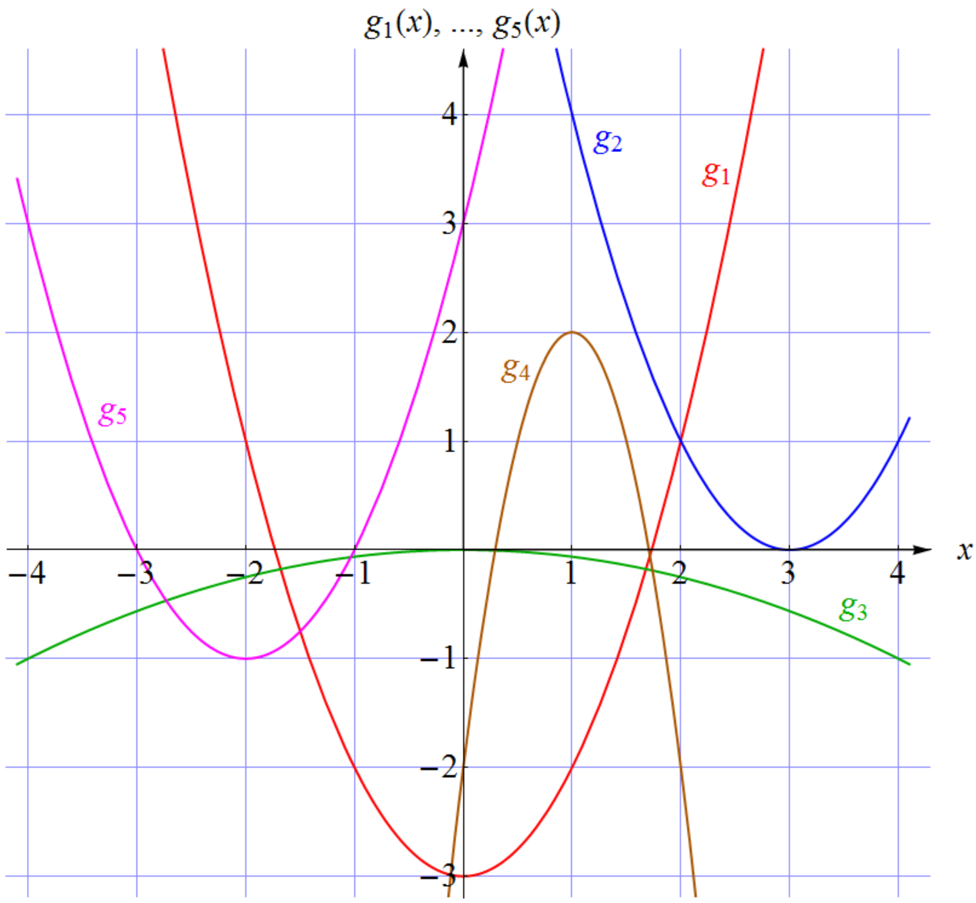
Zeichnen Sie ihre Graphen (ohne Hilfe eines Funktionsplotters)!

Lösungen:



- Mit Hilfe eines Funktionsplotters (am PC oder als App am Tablet oder Smartphone) können Sie Ihr Verständnis für die Eigenschaften und Graphen quadratischer Funktionen fördern, indem Sie einen quadratischen Funktionsterm in einer der besprochenen Darstellungsformen „erfinden“ (wie beispielsweise $2\,x^2 + 5\,x - 4$ oder $4\,(x-1)^2 - 3$ oder $-3\,(x+1)(x-2)$, variieren Sie die auftretenden Koeffizienten nach Belieben!), dann überlegen (oder berechnen), wie der Graph aussehen wird, und erst *danach* den Graphen plotten und mit Ihrer Vorhersage vergleichen!

- Die folgende Abbildung zeigt fünf Graphen quadratischer Funktionen. Geben Sie Funktionsterme für sie an!



Lösungen:

$$g_1(x) = x^2 - 3,\ g_2(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9,\ g_3(x) = -\tfrac{x^2}{16},$$
$$g_4(x) = -4(x-1)^2 + 2 = -4x^2 + 8x - 2,\ g_5(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3.$$

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über quadratische Funktionen und ihre Graphen zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/quadratische_funktionen_und_ihre_graphen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.