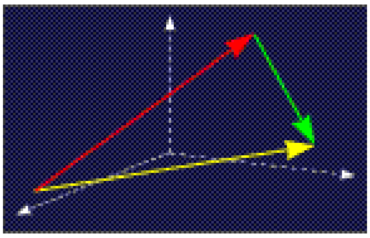

Was ist eine Funktion?

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum soll anhand eines konkreten, in der Alltagswelt relevanten Beispiels einen ersten Einstieg in das Thema „Funktionen“ bieten.

1 Abhängigkeiten

Der Begriff der Funktion ist ein mathematisches Konzept, das überall dort angewandt werden kann, wo eine Größe von einer anderen Größe abhängt. Mit dem Wort „Größe“ kann vielerlei gemeint sein – wir beschränken uns hier auf den Fall, dass es sich um etwas handelt, das durch einen reellen Zahlenwert angegeben wird.

Wann immer eine Formel zur Berechnung einer solchen Größe angegeben wird, hängt eine „Funktion“ in der Luft. Betrachten wir als Beispiel den Anhalteweg beim Autofahren, d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt. Er hängt von vielen Faktoren ab und wird in jedem Fall ein bisschen anders sein. Um aber einen typischen Wert angeben zu können, wird die Faustformel

$$s = \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \tag{1.1}$$

verwendet[1]. Dabei steht s für den Anhalteweg (in Meter) und v für die in $\mathrm{km/h}$ angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens eines Hindernisses). Wann immer wir im Folgenden vom „Anhalteweg“ sprechen, meinen wir den durch (1.1) angegebenen typischen Wert. (1.1) ist zunächst keine Funktion, sondern schlicht eine *Formel* zur Berechnung des Anhaltewegs.

Nun wird ein Neuling in die Kunst des Autofahrens eingeweiht. Er fragt: „Wie lang ist der Anhalteweg?“ Die Antwort, die man ihm darauf geben muss, ist: „Er hängt davon ab, wie

[1] Der lineare Term $\frac{3\,v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

schnell man fährt." Um eine solche **Abhängigkeit** in einer Formel zu kennzeichnen, ist eine eigene Schreibweise eingeführt worden. Anstelle von s schreiben wir $s(v)$:

$$s(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}\,. \tag{1.2}$$

Die Klammer um das Symbol v darf nicht mit der Klammer verwechselt werden, die der Zusammenfassung von Zahlen oder Termen dient. $s(v)$ wird kurz als „s von v" ausgesprochen. Das „von" drückt die Abhängigkeit aus: s hängt „von" v ab. Eine etwas längere Ausdrucksweise ist: „s in Abhängigkeit von v". Oder, wie man auch oft hört: „s als Funktion von v".

Man kann also nicht für den Anhalteweg „als solchen" einen Zahlenwert angeben, sondern nur für den Anhalteweg, der sich bei einer bestimmten Geschwindigkeit ergibt. Beispielsweise: Wie lang ist der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von $50\,\mathrm{km/h}$? Mathematisch bedeutet das: Wir groß ist $s(v)$, wenn $v = 50$ gesetzt wird? Das können wir nun leicht berechnen:

$$s(50) = \frac{50^2}{100} + \frac{3 \cdot 50}{10} = \frac{2500}{100} + \frac{150}{10} = 25 + 15 = 40. \tag{1.3}$$

Der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von $50\,\mathrm{km/h}$ beträgt $40\,\mathrm{m}$. Und bei $60\,\mathrm{km/h}$? Nichts leichter als das:

$$s(60) = \frac{60^2}{100} + \frac{3 \cdot 60}{10} = \frac{3600}{100} + \frac{180}{10} = 36 + 18 = 54. \tag{1.4}$$

Der Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km/h}$ beträgt $54\,\mathrm{m}$.

Es ist auch die umgekehrte Fragestellung möglich: Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Anhalteweg $180\,\mathrm{m}$? Mathematisch bedeutet das: Wie muss v gewählt werden, damit $s(v) = 180$ ist? Oder, direkt mit Hilfe der Faustformel ausgedrückt: Wie muss v gewählt werden, damit

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} = 180 \tag{1.5}$$

ist? Das gesuchte v ist also Lösung einer quadratischen Gleichung. Lösen Sie sie zur Übung selbst! Sie sollten die beiden Lösungen $v = -150$ und $v = 120$ finden. Offenbar ist es die zweite Lösung ($v = 120$), die uns interessiert, während die erste ($v = -150$) keine Bedeutung für die Fragestellung hat. Beim Gleichungslösen haben wir dieses Problem durch die Angabe einer geeignet gewählten *Grundmenge*[2] aus dem Weg geschafft. Ähnlich gehen wir nun hier vor und legen fest, dass uns $s(v)$ nur dann interessiert, wenn $v > 0$ ist. Wir beschränken also den Zahlenbereich, aus dem die Werte von v stammen dürfen, auf die Menge $\mathbb{R}^+$ aller positiven rellen Zahlen. Damit ist ein wichtiger Sichtwechsel verbunden.

2 Zuordnungen

Bisher haben wir mit der Einführung der Schreibweise $s(v)$ (s „von" v) ausgedrückt, dass s von v abhängt und wir uns für diese Abhängigkeit interessieren. Jetzt drehen wir den Spieß um

[2] Siehe dazu das Skriptum *Was ist eine Gleichung?*

und gehen von v aus. Für jedes positive v (die negativen interessieren uns nicht, und auch der Fall $v = 0$ ist nicht wirklich von Interesse) gibt (1.2) den Anhalteweg an, der sich bei dieser Geschwindigkeit ergibt. Wir sagen, dass damit jedem $v > 0$ ein Wert $s(v)$ **zugeordnet** wird, oder, dass jedes $v > 0$ auf einen Wert $s(v)$ **abgebildet** wird.

Die Menge, aus der die erlaubten Werte für v kommen dürfen, ist $\mathbb{R}^+$. Für jedes Element dieser Menge kann mittels (1.2) eine reelle Zahl $s(v)$ berechnet werden. Wird $v \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so ergibt sich eine reelle Zahl $s(v) \in \mathbb{R}$. Die Vorschrift, die jeder Zahl $v \in \mathbb{R}^+$ eine Zahl $s(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet, nennen wir eine **Funktion** (oder **Abbildung**). Dieser geben wir auch einen Namen, nämlich s. Um auszudrücken, dass s jedem Element von $\mathbb{R}^+$ ein Element von $\mathbb{R}$ zuordnet, schreiben wir

$$s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Wir nennen s (und sprechen (2.1) auch so aus) eine Funktion von der Menge $\mathbb{R}^+$ in die Menge $\mathbb{R}$. Um die konkrete Zuordnungsvorschrift auszudrücken, schreiben wir entweder (1.2) an oder benutzen die alternative Schreibweise[3]

$$s : v \mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}\,. \tag{2.2}$$

Beachten Sie, dass die Pfeile in (2.1) und (2.2) ein bisschen unterschiedlich aussehen. Der erste drückt aus, von welcher Menge in welche Menge eine Funktion wirkt, und der zweite (ausgesprochen als „wird abgebildet auf" oder auch „geht über in") gibt diese Wirkung an.

Eine vollständige, ordentlich angeschriebene Definition unserer Funktion s sieht also entweder so

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(bzw., wenn Sie wollen, mit einem vorangestellten „s :" wie in (2.2)) oder so

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ s(v) &= \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \end{aligned} \tag{2.4}$$

aus. Um den Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von $50\,\mathrm{m}$ anzugeben, machen wir die in (1.3) ausgeführte Rechnung und schreiben

$$s(50) = 40 \tag{2.5}$$

oder

$$s : 50 \mapsto 40. \tag{2.6}$$

Beachten Sie, dass der **Name** unserer Funktion schlicht und einfach s ist. $s(50)$ wird „**Funktionswert** an der Stelle 50" genannt. Der Ausdruck $s(v)$ steht für einen „allgemeinen" Funktionswert.

[3] Diese Form ist besonders günstig, wenn man einer Funktion, von der klar ist, von welcher Menge in welche Menge sie abbildet, keinen Namen geben, aber dennoch ihre Wirkung beschreiben will. Man würde in unserem Fall dann einfach $v \mapsto \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}$ schreiben.

Anmerkung: Dass s der Name einer Funktion, also eines doch recht ausgefeilten mathematischen Objekts ist, kommt nun ein bisschen in Konflikt damit, dass wir in (1.1) mit s einfach den Anhalteweg bezeichnet haben:

- Aus mathematischer Sicht bezeichnet s die Funktion, d.h. die Zuordnungsvorschrift, und $s(v)$ einen Funktionswert. Aus dieser Perspektive sind s und $s(v)$ zwei ganz verschiedene Dinge.
- Aus praktischer (technischer, physikalischer,...) Sicht bezeichnet s den Anhalteweg, und mit $s(v)$ ist nur ausgedrückt, dass er von v abhängt. Das wird manchmal auch in der Form $s \equiv s(v)$ („s hängt ab von v“ oder „s ist eine Funktion von v“) angeschrieben. Aus dieser Perspektive besteht zwischen s und $s(v)$ kein nennenswerter Unterschied, außer dass die zweite Form etwas mehr Information beinhaltet.

An diese Zweideutigkeit müssen Sie sich gewöhnen! Es hätte nicht viel Sinn, noch einen weiteren Buchstaben einzuführen, um diese Diskrepanz auszuglätten. Versuchen Sie einfach, beide Sichtweisen zu verstehen und selbst einnehmen zu können!

Während s der Name unserer Funktion ist, den wir jederzeit benutzen können, ist die Verwendung des Buchstabens v in (1.2), (2.2), (2.3) oder (2.4) nicht verpflichtend, da es dort nur um die konkrete Art der Zuordnung geht. Wir könnten stattdessen genausogut

$$s(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{3\,x}{10} \tag{2.7}$$

oder

$$s(\star) = \frac{\star^2}{100} + \frac{3\,\star}{10} \tag{2.8}$$

oder

$$s : \xi \mapsto \frac{\xi^2}{100} + \frac{3\,\xi}{10} \tag{2.9}$$

schreiben. Die Funktion s wäre dieselbe. Die Verwendung des Buchstabens x ist, wie bei den Gleichungen, auch bei Funktionen weithin üblich. Wenn wir ein Wort für diese Art Größe benötigen (etwa um über eine Berechnung zu sprechen), so können wir sie „unabhängige Variable“ nennen, da sie, solange sie Element von $\mathbb{R}^+$ ist, frei vorgegeben werden kann. Die Kurzbezeichnung dafür ist schlicht und einfach „Variable“.

Funktionen werden auch **Abbildungen** oder (**eindeutige**) **Zuordnungen** genannt. Der Zusatz „eindeutig“ drückt aus, dass jedem $v \in \mathbb{R}^+$ *genau ein* Element $s(v) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird: Ist v vorgegeben, so ist $s(v)$ eindeutig bestimmt.

3 Und wozu das Ganze?

Das ist eine berechtigte Frage! Zählen wir anhand unseres Beispiels (Anhalteweg als Funktion der Geschwindigkeit) einige Vorteile auf, die man davon hat, die Angelegenheit als „Funktion von einer Menge in eine andere“ aufzufassen:

- Die durch (2.3) oder (2.4) definierte Funktion s ist eine mathematisch präzise Formulierung des Zusammenhangs zwischen Anhalteweg und Geschwindigkeit[4]. Die Begriffe „Formel“ und „Term“ sind hingegen etwas unscharf. Ist beispielsweise der Term, der s in (1.1) definiert, der gleiche Term wie $\frac{1}{100}\, v\,(v+30)$? Zumindest sind die zwei Terme äquivalent, da sie für jedes v den gleichen Zahlenwert ergeben. Aber sind sie wirklich *gleich*? Um diese Frage beantworten zu können, ist viel zu wenig klar, was ein „Term“ eigentlich ist. Wird s hingegen als Funktion angesehen, die jeder Geschwindigkeit $v > 0$ einen Anhalteweg $s(v)$ zuordnet, so ist das ein viel präziseres Konzept. Eine Funktion u, die die gleiche Wirkung hat wie s, d.h. die die gleiche Zuordnungsvorschrift darstellt, ist tatsächlich im besten mathematischen Sinn das Gleiche wie s, egal welchen Term (oder welche andere Methode, wie zum Beispiel eine Beschreibung in Worten) wir benutzen, um sie zu definieren. In diesem Fall können wir mit gutem Gewissen $u = s$ schreiben.

- Die Funktionsschreibweise ist sehr knapp und drückt viel aus. Man kann sich vornehmen, $s(50)$ zu berechnen, man kann das Ergebnis $s(50) = 40$ notieren oder sich fragen, wie v zu wählen ist, damit $s(v) = 180$ gilt. Alles in wenigen Symbolen ausgedrückt! (Das verkürzt nicht die Arbeit, die quadratische Gleichung $s(v) = 180$ zu lösen, aber immerhin erlaubt es uns, die *Frage* in sehr komprimierter Form zu stellen.)

- Die konkrete Art der Abhängigkeit des Anhaltewegs von der Geschwindigkeit kann in systematischer Weise (mit Mitteln, die die Mathematik bereitstellt und die Sie bereits kennen oder noch kennenlernen werden) untersucht und diskutiert werden. Beispielsweise nennen wir die Funktion s *streng monoton wachsend*, da eine Vergrößerung von v auch eine Vergrößerung von $s(v)$ zur Folge hat. Wir nennen sie *injektiv*, weil zwei verschiedene Geschwindigkeiten nicht den gleichen Anhalteweg ergeben können (woraus folgt, dass die Gleichung $s(v) = 180$ über $\mathbb{R}^+$ genau eine Lösung besitzt).

- Auch kompliziertere Fragen können in knapper Form gestellt werden: Um welchen Faktor erhöht sich der Anhalteweg, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird? Er hängt von der Geschwindigkeit v ab, die verdoppelt werden soll, und beträgt $\dfrac{s(2\,v)}{s(v)}$. Dieser Ausdruck definiert selbst eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ f(v) &= \frac{s(2\,v)}{s(v)}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

[4] Mit der Aussage, dass die durch (2.3) oder (2.4) definierte Funktion s eine mathematisch präzise Formulierung des Zusammenhangs zwischen Anhalteweg und Geschwindigkeit ist, ist nicht gemeint, dass die in einer *realen* Situation gemessenen Werte von Anhalteweg und Geschwindigkeit exakt in der durch die Funktion s angegebenen Beziehung stehen. Bei der Funktion s handelt es sich um ein *mathematisches Modell*, das natürlich nur eine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Die obige Aussage drückt aus, dass s *als Modell* präzise formuliert ist.

Interessanterweise ist sie *nach oben beschränkt*: Ihr Funktionwert ist für alle v kleiner als 4. (Durch eine Verdopplung der Geschwindigkeit wird der Anhalteweg also nie viermal so lang oder länger.) Die Begründung kann mit Hilfe der Funktionsschreibweise übersichtlich gestaltet werden und erfordert nur ein bisschen Termrechnung mit Brüchen:

$$\begin{aligned} f(v) = \frac{s(2\,v)}{s(v)} &= \frac{\frac{(2\,v)^2}{100} + \frac{3\cdot 2\,v}{10}}{\frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}} = \frac{4\,v+60}{v+30} = \frac{4\,v+120-60}{v+30} = \\ &= \frac{4\,(v+30)-60}{v+30} = 4 - \underbrace{\frac{60}{v+30}}_{>0}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Am Beginn dieser Umformung wurde „$f(v) =$“ geschrieben, um klar auszudrücken, was im Folgenden berechnet wird. Als Ergebnis können wir notieren

$$f(v) < 4 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^+. \tag{3.3}$$

- Wir können die Zuordnung s in einem Schaubild (dem *Graphen*), dem wir viel ansehen, darstellen (Abbildung 1).

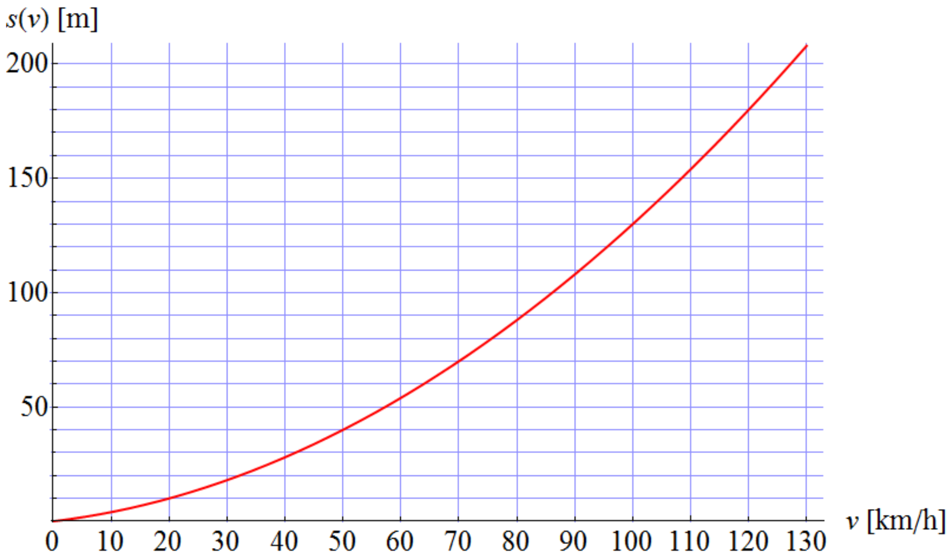

Abbildung 1: Graph der hier diskutierten Funktion s. (Genauer gesagt handelt es sich um einen Ausschnitt, da der gesamte Graph – mathematisch gesehen – bis ins Unendliche reicht.)

- Falls für einen konkreten Zweck benötigt, können wir eine Tabelle (*Wertetabelle*) für ausgewählte Werte der Geschwindigkeit, etwa von 10 bis 130 in Zehnerschritten, und die zugehörigen Funktionswerte erstellen. Die Beschriftung der ersten Zeile einer solchen

Tabelle illustriert noch einmal, was wir unter $s(v)$ verstehen:

v [km/h]	$s(v)$ [m]
10	4
20	10
30	18
40	28
50	40
60	45
70	70
80	88
90	108
100	130
110	154
120	180
130	208
140	238
150	270

(3.4)

Man erkennt, wie stark der Anhalteweg bei größeren Geschwindigkeiten mit jeder weiteren Vergrößerung von v ansteigt.

- Praktisch unverzichtbar wird der Funktionsbegriff, wenn es ums Differenzieren und Integrieren geht, in unserem Beispiel etwa um die Frage, wie sich der Anhalteweg ändert, wenn v ein klein wenig vergrößert wird.

Funktionen stellen in gewisser Weise die Basis der modernen Mathematik dar. Kein Teilgebiet der Mathematik und kaum ein Anwendungsbereich kommt ohne sie aus.

Überzeugt?

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.