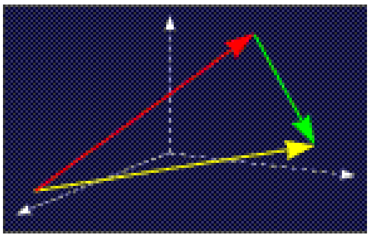
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum behandelt Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen. Das dafür nötige Vorwissen wird zuvor kurz skizziert.

1 Potenzen und Logarithmen

In diesem Skriptum müssen wir voraussetzen, dass Sie mit Potenzen und Logarithmen vertraut sind[1]. Für den Fall, dass Ihre Erinnerungen an diese Dinge schwach sind, geben wir zu Beginn eine Einführung, in der alles enthalten ist, was wir zum Lösen von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen benötigen.

Mit jeder reellen Zahl $a > 0$ und jeder reellen Zahl x können wir die *Potenz* a^x bilden. Dabei nennen wir a die *Basis* und x den *Exponenten* (oder die *Hochzahl*). Da sich für $a = 1$ keine interessanten Potenzen ergeben, wollen wir im Folgenden für alle auftretenden Basen annehmen, dass sie $\neq 1$ sind.

Nun nehmen wir in Gedanken ein a (positiv und $\neq 1$) und ein x (beliebig) und bilden die Potenz

$$u = a^x. \tag{1.1}$$

Und jetzt stellen wir uns vor, wir hätten x vergessen, wüssten aber noch die Werte von a und u. Können wir x ermitteln? Die Antwort ist erfreulicherweise ja, denn gleich zu Beginn unserer Überlegungen kommt uns eine wichtige mathematische Tatsache zu Hilfe: Sind a und u zwei positive reelle Zahlen (und $a \neq 1$), so gibt es nur eine einzige reelle Zahl x, für die $a^x = u$ ist. Das Problem, x aus a und u zu bestimmen, besitzt also eine eindeutige Lösung. Wir können sie zwar nicht immer mit Hilfe der Grundrechnungsarten berechnen, aber ein Taschenrechner oder ein mathematisches Computerprogramm gibt (beliebig genaue) Näherungswerte aus. Daher

[1] Siehe dazu die Skripten *Potenzen* und *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

benötigen wir zunächst eine Bezeichnung für diese Operation – und das ist der *Logarithmus*. Wir schreiben[2]

$$x = \log_a u \qquad \text{oder} \qquad x = \log_a(u) \tag{1.2}$$

und nennen das „den Logarithmus von u zur Basis a". Eine Zahl u zu *logarithmieren* bedeutet, den Exponenten x in der Darstellung $u = a^x$ für eine gegebene Basis a zu berechnen. Mit der symbolischen Schreibweise (1.2) verhält es sich ähnlich wie mit dem Wurzelsymbol beim Wurzelziehen: Es gibt genau eine positive Zahl, deren Quadrat 2 ist, und diese Zahl nennen wir die Quadratwurzel (oder kurz Wurzel) aus 2 und schreiben sie in der Form $\sqrt{2}$ an. Wir können wunderbar mit ihr rechnen, ganz ohne Dezimaldarstellung. In gleicher Weise gilt: Wird die näherungsweise Dezimaldarstellung eines Logarithmus benötigt, der sich „händisch" nicht berechnen lässt, so benutzen wir einfach den Taschenrechner oder ein mathematisches Computerprogramm. Im allgemeinen Fall notieren wir Rechenergebnisse aber lieber in exakter symbolischer Form als in näherungsweiser Dezimaldarstellung.

Betrachten wir ein Beispiel:

$$\log_2 8 = 3. \tag{1.3}$$

Warum? Weil $8 = 2^3$ ist! Ein anderes Beispiel: Was ist $\log_{10}(1\,\text{Million})$?

$$\log_{10}(1\,\text{Million}) = 6, \text{ da } 1\,\text{Million} = 10^6.$$

Weiters gilt für jede Basis a, dass

$$\log_a a = 1 \qquad \text{und} \qquad \log_a 1 = 0. \tag{1.4}$$

Schlüsse wie diese sollten Ihnen keine allzu großen Schwierigkeiten bereiten!

Aus der Eigenschaft des Logarithmus, den Exponenten einer Potenz anzugeben, folgen zwei wichtige **Rechengesetze**. Das erste lautet

$$\log_a(u\,v) = \log_a u + \log_a v. \tag{1.5}$$

In Worten: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen (bezüglich der gleichen Basis). Diese Regel folgt einfach aus der Identität $a^x\,a^y = a^{x+y}$, wenn die Abkürzungen $u = a^x$ und $v = a^y$ verwendet werden. Das zweite Rechengesetz lautet:

$$\log_a(u^z) = z\,\log_a u, \tag{1.6}$$

wobei z eine beliebige reelle Zahl ist. In Worten ausgedrückt: Beim Logarithmieren einer Potenz darf der Exponent „vor den Logarithmus gestellt" werden. Diese Regel folgt aus der Identität $(a^x)^z = a^{x\,z}$, wenn die Abkürzung $u = a^x$ verwendet wird. Für natürliche z folgt sie unmittelbar aus (1.5). So gilt etwa für $z = 2$

$$\log_a(u^2) = \log_a(u \cdot u) = \log_a u + \log_a u = 2\,\log_a u. \tag{1.7}$$

[2] Die Klammer kann weggelassen werden, wenn klar ist, wovon der Logarithmus gebildet wird. In $\log_3(6^2)$ sollte sie geschrieben werden, da bei der Schreibweise $\log_3 6^2$ eine Verwechslung mit $(\log_3 6)^2$ droht. Ansonsten ist es Geschmackssache, ob die Klammer geschrieben wird.

Aus den Rechengesetzen (1.5) und (1.6) folgen einige weitere, von denen die wichtigsten

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \tag{1.8}$$

und

$$\log_a\left(\frac{1}{u^z}\right) = -z\,\log_a u \tag{1.9}$$

lauten. Sie sollten alle diese Regeln gut kennen und in konkreten Situationen anwenden können. Insbesondere kann man mit ihnen Ausdrücke, die Logarithmen (von Zahlen oder von Termen) enthalten, erheblich vereinfachen. So ist beispielsweise

$$\log_3 81 = \log_3(3^4) = 4\,\log_3 3 = 4 \tag{1.10}$$

und

$$\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -\log_5 125 = -\log_5(5^3) = -3\,\log_5 5 = -3 \tag{1.11}$$

sowie (für $x > 1$)

$$\log_{10}(x^2-1) - \log_{10}(x-1) = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \log_{10}(x+1). \tag{1.12}$$

Ein Blick auf Ihren wissenschaftlichen Taschenrechner zeigt (höchstwahrscheinlich), dass er eine Taste besitzt, die mit „lg“ oder „log“ beschriftet ist und möglicherweise auch eine Taste, auf der „ln“ steht. In seltenen Fällen gibt es auch eine Taste „ld“. Diese Tasten stehen für Logarithmen zu besonderen Basen:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{lg} = \log_{10} & \text{Logarithmus zur Basis } 10 \\ & \text{(dekadischer Logarithmus oder Zehnerlogarithmus)} \\ \ln = \log_e & \text{Logarithmus zur Basis } e \text{ (natürlicher Logarithmus)} \\ \mathrm{ld} = \log_2 & \text{Logarithmus zur Basis } 2 \text{ (\textit{logarithmus dualis})} \end{array} \tag{1.13}$$

Steht auf einer Taste einfach „log“, so ist damit meist der Zehnerlogarithmus gemeint. In manchen mathematischen Computerprogrammen hingegen wird mit dem Befehl „log“ oder „Log“ der natürliche Logarithmus[3] bezeichnet. (Letzteres ist etwa in *Mathematica* der Fall.) Sie werden auf Ihrem Taschenrechner wahrscheinlich keine Taste für $\log_3$ finden, aber das macht nichts, denn Logarithmen zu verschiedenen Basen können einfach ineinander umgerechnet werden:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}\,, \tag{1.14}$$

wobei b eine beliebige andere Basis ist. Die Logarithmen zu zwei verschiedenen Basen, $\log_a u$ und $\log_b u$, unterscheiden sich also nur durch einen multiplikativen Umrechnungsfaktor. Wollen Sie also etwa mit Ihrem Taschenrechner einen Näherungswert von $\log_2 5$ ermitteln, so

[3] Über die Zahl e (die sogenannte *Eulersche Zahl*, die Basis des natürlichen Logarithmus) wollen wir in diesem Skriptum nichts sagen, außer dass sie eine in der Mathematik äußerst wichtige irrationale Zahl ist, deren Dezimaldarstellung mit $e = 2.718281828\ldots$ beginnt. (Für genauere Informationen siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.) Ihr Taschenrechner besitzt wahrscheinlich eine Taste zur Berechnung von Potenzen der Form e^x.

berechnen Sie mit den entsprechenden Tasten einfach

$$\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \quad \text{oder} \quad \frac{\ln 5}{\ln 2}\,. \tag{1.15}$$

Ein Logarithmus kann 0 oder negativ sein (Beispiele: $\log_a 1 = 0$ für jede Basis a, und $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$), aber der Logarithmus kann (im Rahmen der reellen Zahlen, auf den wir uns hier beschränken[4]) nur von positiven Zahlen gebildet werden. $\log_{10}(-1)$ macht genauso wenig Sinn wie $\sqrt{-1}$.

Sowohl die Rechengesetze für den Logarithmus als auch die Umrechnung (1.14) von Logarithmen zu verschiedenen Basen machen es möglich, ein Rechenergebnis, in dem Logarithmen vorkommen, auf verschiedene Weisen anzugeben. So sind beispielsweise die folgenden Zahlen alle gleich:

$$\log_9 25 = 2\,\log_9 5 = 2\,\frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \log_3 5 \tag{1.16}$$

(ein dezimaler Näherungswert dafür ist 1.46497), und das Gleiche gilt für die Zahlen

$$\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5 = \frac{\ln 15}{\ln 2} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 2} \tag{1.17}$$

(ein Näherungswert ist 3.90689). Diese Mehrdeutigkeit macht es nicht gerade leicht, bei Aufgaben, deren Lösung mitgeliefert wird, zu entscheiden, ob das Ergebnis, das man selbst erhalten hat, mit der angegebenen Lösung übereinstimmt.

Eine letzte Tatsache müssen wir uns noch vor Augen halten: Wir haben bereits erwähnt, dass das Problem, den Exponenten x zu bestimmen, wenn nur die Basis a und die Potenz $u = a^x$ bekannt sind, nur eine einzige Lösung besitzt (nämlich den Logarithmus von u zur Basis a). Daraus folgt, dass es keine zwei Darstellungen von u als Potenz von a mit verschiedenen Exponenten geben kann. Mathematisch sauber ausgedrückt bedeutet das, dass für $a > 0$ mit $a \neq 1$ und für alle reellen x, y stets gilt:

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y. \tag{1.18}$$

Zwei Potenzen der gleichen Basis sind genau dann gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind.

[4] Im Rahmen des erweiterten Zahlbegriffs der *komplexen Zahlen*, die aber hier nicht das Thema sind, sieht das alles ganz anders aus.

2 Exponentialgleichungen

In einer **Exponentialgleichung** kommen Potenzen vor, bei denen die Variable (die wir x nennen) im Exponenten steht. Beginnen wir mit der einfachen Exponentialgleichung

$$3^x = 8. \tag{2.1}$$

Wir haben zwei Möglichkeiten, sie zu lösen:

1. Möglichkeit: Wir verwenden die Definition des Logarithmus („der Logarithmus stellt den Exponenten dar“) und kennen sofort die (einzige) Lösung: $x = \log_3 8$. Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L = \{\log_3 8\}$.

2. Möglichkeit: Wir entscheiden uns für eine Basis, in der wir arbeiten wollen (z.B. für die Basis 10, da es auf dem Taschenrechner eine Taste für den Zehnerlogarithmus gibt) und bilden den Logarithmus beider Seiten von (2.1):

$$\begin{aligned} 3^x &= 8 && \mid \text{ lg auf beide Seiten anwenden} \\ \lg(3^x) &= \lg 8 && \mid \text{ linke Seite vereinfachen} \\ & && \mid \text{ (den Exponenten vor den Logarithmus stellen)} \\ x \lg 3 &= \lg 8 && \mid\ : \lg 3 \\ x &= \tfrac{\lg 8}{\lg 3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

   Hier erscheint die Lösung durch den Zehnerlogarithmus ausgedrückt. Die Lösungsmenge von (2.1) ist $L = \{\frac{\lg 8}{\lg 3}\}$. (Statt des Zehnerlogarithmus hätte man sich auch für irgendeine andere Basis entscheiden können. Wäre unsere Wahl auf den natürlichen Logarithmus gefallen, so hätte sich die Lösung in der Form $\frac{\ln 8}{\ln 3}$ ergeben. Hätten wir den Logarithmus zur Basis 3 gewählt, so hätte die Lösung die Form $\log_3 8$ gehabt.)

Die Lösungen stimmen überein, auch wenn sie verschieden aussehen. Hätte man die erste Form der Lösung, $\log_3 8$, mit Hilfe von (1.14) in den Zehnerlogarithmus umgerechnet, so hätte sich genau die zweite Form, $\frac{\lg 8}{\lg 3}$, ergeben. Ein numerischer Näherungswert für die Lösung ist 1.89279. Sie können dieses Ergebnis mit der Potenzfunktion ihres Taschenrechners leicht näherungsweise überprüfen, indem Sie $3^{1.89279}$ berechnen. Das Ergebnis weicht nur wenig von 8 ab. Diese numerische Probe zeigt vielleicht am schönsten, was der Logarithmus ist. $\log_3 8$ ist die Antwort auf die Frage, als welche „Dreierpotenz“ 8 dargestellt werden kann. Genau das ist die Frage, die Gleichung (2.1) ausdrückt: „3 hoch wieviel ist 8?“.

> Anmerkung: Die zweite der soeben angewandten Methoden bestand darin, beide Seiten der Gleichung zu logarithmieren. Im Fall von (2.1) ist das möglich, da beide Seiten positiv sind: Für jedes reelle x ist $3^x > 0$, und auch 8 ist positiv. Diese Methode sollte nur bei Gleichungen angewandt werden, bei denen in ähnlicher Weise offensichtlich ist, dass dabei nicht der Logarithmus einer negativen Zahl gebildet werden muss. In diesen Fällen handelt es sich aufgrund der Eindeutigkeit des Logarithmus um eine *Äquivalenzumformung*, d.h. wir bekommen eine vereinfachte Gleichung, die dieselbe Lösungsmenge hat wie die ursprüngliche.

Eine etwas komplizierter aussehende Exponentialgleichung ist

$$5^{2\,x-7} = 25. \tag{2.3}$$

Hier haben wir sogar drei Lösungsmöglichkeiten (von denen die erste die klügste ist):

1. Möglichkeit: Wir bemerken, dass $25 = 5^2$ ist. Daher lautet (2.3), nur anders angeschrieben,

$$5^{2\,x-7} = 5^2. \tag{2.4}$$

   Mit (1.18) schließen wir, dass (2.4) genau dann erfüllt ist, wenn die Exponenten gleich sind, d.h. wenn $2\,x - 7 = 2$ gilt. Diese einfache Gleichung können wir leicht lösen:

$$\begin{aligned} 2\,x - 7 &= 2 \quad | \ +7 \\ 2\,x &= 9 \quad | \ :2 \\ x &= \tfrac{9}{2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2. Möglichkeit: Wir verwenden die Definition des Logarithmus und wissen sofort, dass $2\,x - 7 = \log_5 25$ ist. Diese Gleichung können wir vereinfachen und lösen:

$$\begin{aligned} 2\,x - 7 &= \log_5 25 && | \ \text{rechte Seite vereinfachen} \\ & && | \ (\log_5 25 = \log_5(5^2) = 2\,\log_5 5 = 2) \\ 2\,x - 7 &= 2 && | \ +7 \\ 2\,x &= 9 && | \ :2 \\ x &= \tfrac{9}{2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. Möglichkeit: Wir entscheiden uns dafür, mit dem natürlichen Logarithmus zu arbeiten und logarithmieren beide Seiten von (2.3):

$$\begin{aligned} 5^{2\,x-7} &= 25 && | \ \ln \text{ auf beide Seiten anwenden} \\ \ln(5^{2\,x-7}) &= \ln 25 && | \ \text{beide Seiten vereinfachen} \\ (2\,x-7)\ln 5 &= 2 \ln 5 && | \ :\ln 5 \\ 2\,x - 7 &= 2 && | \ +7 \\ 2\,x &= 9 && | \ :2 \\ x &= \tfrac{9}{2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Alle drei Ergebnisse erscheinen hier in der gleichen Form. Die Lösungsmenge von (2.3) ist $L = \{\frac{9}{2}\}$.

Als nächstes betrachten wir die Exponentialgleichung

$$2^{3\,x} = 4^{1-x}. \tag{2.8}$$

Wieder gibt es hier mehrere Lösungsmöglichkeiten. Die einfachste ist diese: Wir bemerken, dass $4 = 2^2$ ist und formen 4^{1-x} in $(2^2)^{1-x} = 2^{2\,(1-x)}$ um. Daher kann (2.8) auch in der Form

$$2^{3\,x} = 2^{2\,(1-x)} \tag{2.9}$$

geschrieben werden. Mit (1.18) schließen wir, dass das genau dann erfüllt ist, wenn die Exponenten gleich sind, d.h. wenn $3\,x = 2\,(1 - x)$ ist. Lösen Sie diese Gleichung selbst!

Die Lösung ist:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{5}{2}\}$.

Nur ein bisschen komplizierter wird es, wenn wir vor einer Gleichung wie

$$2^{3\,x} = 4^{1+x} \cdot 3 \tag{2.10}$$

stehen. Mit $4^{1+x} = (2^2)^{1+x} = 2^{2\,(1+x)}$ können wir sie in der Form

$$2^{3\,x} = 2^{2\,(1+x)} \cdot 3 \tag{2.11}$$

anschreiben und danach so verfahren:

$$\begin{aligned} 2^{3\,x} &= 2^{2\,(1+x)} \cdot 3 &&|\ \cdot 2^{-2\,(1+x)} \\ 2^{3\,x}\,2^{-2\,(1+x)} &= 3 &&|\ \text{linke Seite vereinfachen} \\ 2^{3\,x-2\,(1+x)} &= 3 &&|\ \text{linke Seite weiter vereinfachen} \\ 2^{x-2} &= 3 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Auf die so erhaltene vereinfachte Gleichung kann eines der im Zusammenhang mit (2.1) besprochenen Verfahren angewandt werden. Machen Sie das zur Übung selbst!

Die Lösung ist:

Die Lösungsmenge ist $L = \{2 + \log_2 3\} = \{2 + \frac{\lg 3}{\lg 2}\} = \{2 + \frac{\ln 3}{\ln 2}\}$.

In allen bisher betrachteten Exponentialgleichungen sind entweder nur Potenzen mit einer einzigen Basis aufgetreten (in (2.1) die Basis 3 und in (2.3) die Basis 5), oder wir haben es durch einfache Umformungen geschafft, der Gleichung eine solche Form zu geben (in (2.8) und (2.10) treten die Basen 2 und 4 auf, aber da $4 = 2^2$ ist, konnten wir die relevanten Terme als Potenzen der Basis 2 umschreiben). Gehen Sie diese Gleichungen noch einmal durch, und lassen Sie das gemeinsame „Strickmuster" aller vorgeführten Lösungswege auf sich wirken!

Als letztes Beispiel einer Exponentialgleichung, die leicht gelöst werden kann, betrachten wir

$$2^{5\,x-1} = 7^{3\,x+2}. \tag{2.13}$$

Da hier zwei Basen (nämlich 2 und 7) auftreten, von denen *nicht* die eine eine einfach anzuschreibende Potenz der anderen ist, ist die direkte Ausnutzung der Definition des Logarithmus umständlich[5]. Aber es bleibt die einfachere Möglichkeit, von beiden Seiten den Logarithmus zu einer beliebigen Basis zu bilden. Wir entscheiden uns für den natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned} 2^{5\,x-1} &= 7^{3\,x+2} &&|\ \ln \text{ auf beide Seiten anwenden} \\ \ln(2^{5\,x-1}) &= \ln(7^{3\,x+2}) &&|\ \text{beide Seiten vereinfachen} \\ (5\,x-1)\ln 2 &= (3\,x+2)\ln 7 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wir überlassen es Ihnen, diese (lineare) Gleichung zu lösen.

[5] Sie ist aber möglich, indem etwa 7 als $2^{\log_2 7}$ geschrieben wird.

Die Lösung ist:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{\ln 2 + 2\ln 7}{5\ln 2 - 3\ln 7}\}$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts erwähnen wir noch, dass viele harmlos aussehende Exponentialgleichungen, wie etwa

$$2^x = 3\,x \tag{2.15}$$

oder

$$2^x = 3^x - 2, \tag{2.16}$$

mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht exakt gelöst werden können. In diesen Fällen werden numerische Näherungsverfahren angewandt (die aber nicht Gegenstand dieses Skriptums sind).

3 Logarithmische Gleichungen

Eine **logarithmische Gleichung** enthält, wie der Name sagt, Logarithmen. Oft kann eine derartige Gleichung gelöst werden, indem beide Seiten zu einer geeigneten „Potenz erhoben“ werden, d.h. es wird eine Operation der Form „a hoch“ auf beide Seiten angewandt. Wird dann die Identität

$$a^{\log_a u} = u \tag{3.1}$$

(die aus den Rechenregeln für den Logarithmus folgt[6]) benutzt, so löst sich die logarithmische Gleichung manchmal (bei Übungsaufgaben meistens) in Wohlgefallen auf.

Ein Beispiel für eine solche Gleichung wäre

$$\ln(3\,x - 1) = 5. \tag{3.2}$$

Die Basis des hier auftretenden Logarithmus ist e. Bilden wir „e hoch“ beide Seiten von (3.2), so erhalten wir unter Verwendung von (3.1) die Gleichung

$$3\,x - 1 = e^5 \tag{3.3}$$

und daher als (einzige) Lösung $x = \frac{1}{3}(e^5 + 1)$. Aber Achtung! Während bei den Exponentialgleichungen stets beide Seiten für alle Werte der Variablen definiert waren, ist das bei logarithmischen Gleichungen nicht der Fall. So ist die linke Seite von (3.2) nur dann definiert, wenn $3\,x - 1 > 0$ ist. Anderenfalls wäre ja der Logarithmus von 0 oder von einer negativen Zahl zu bilden. Wir müssen daher als **Definitionsmenge**[7] $D = \{x \in \mathbb{R}\,|\,3\,x - 1 > 0\}$ festlegen und überprüfen, ob $\frac{1}{3}(e^5 + 1)$ tatsächlich Element von D ist. Daher ein kurzer Check:

$$3 \cdot \frac{1}{3}(e^5 + 1) - 1 = e^5 + 1 - 1 = e^5 > 0. \tag{3.4}$$

[6] Um das einzusehen, müssen sie nur $x = \log_a u$ in $a^x = u$ einsetzen!

[7] Zur Definitionsmenge siehe das Skriptum über Bruchgleichungen.

Unser Lösungskandidat ist tatsächlich eine Lösung von (3.2). Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{3}(e^5+1)\}$.

Um die Gleichung

$$\ln(3\,x-1)-\ln(x+2)=5 \tag{3.5}$$

zu lösen, legen wir zunächst die Definitionsmenge $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\,x-1>0 \text{ und } x+2>0\}$ fest[8]. Nun verwenden wir die Regel (1.8), um die linke Seite in der Form

$$\ln\left(\frac{3\,x-1}{x+2}\right) \tag{3.6}$$

zu schreiben. Bilden wir dann „e hoch“ beide Seiten von (3.5), so ergibt sich die Bruchgleichung

$$\frac{3\,x-1}{x+2}=e^5. \tag{3.7}$$

Ihre Lösung (berechnen Sie sie zur Übung selbst!) ist $x=-\frac{2\,e^5+1}{e^5-3}$. Wir überprüfen, ob sie in der Definitionsmenge liegt, wobei wir uns umständliche Umformungen sparen und einfach den Taschenrechner benutzen. Es ergibt sich $3\,x-1\approx -7.144$, was nicht positiv ist. Unsere Lösung von (3.7) ist daher *keine* Lösung von (3.5)! Die Lösungsmenge von (3.5) ist leer: $L=\{\,\}$.

Um die Gleichung

$$\ln(3\,x-1)+\ln(x+2)=5 \tag{3.8}$$

zu lösen, legen wir die Definitionsmenge $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\,x-1>0 \text{ und } x+2>0\}$ fest[9] und verwenden die Regel (1.5), um die linke Seite in der Form

$$\ln\Big((3\,x-1)\,(x+2)\Big) \tag{3.9}$$

zu schreiben. Bilden wir dann „e hoch“ beide Seiten von (3.8), so ergibt sich die (quadratische) Gleichung

$$(3\,x-1)\,(x+2)=e^5, \tag{3.10}$$

deren Lösungen (wenden Sie zur Übung selbst die „große Lösungsformel“ an!)

$$x_{1,2}=\frac{1}{6}\left(-5\pm\sqrt{12\,e^5+49}\right) \tag{3.11}$$

sind. Wieder handelt es sich nur um Lösungskandidaten der ursprünglichen Gleichung (3.8). Wir überprüfen, ob sie in deren Definitionsmenge liegen, wobei wir uns wieder umständliche Umformungen sparen und die betreffenden Zahlenwerte einfach näherungsweise mit dem Taschenrechner ermitteln:

[8] Vielleicht fällt Ihnen auf, dass von den beiden Bedingungen $3\,x-1>0$ und $x+2>0$ eine überflüssig ist. Die erste gilt, wenn $x>\frac{1}{3}$ ist, und die zweite gilt, wenn $x>-2$ ist. Ist die erste erfüllt, so gilt automatisch auch die zweite. Die Definitionsmenge kann also einfach in der Form $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\,x-1>0\}$ geschrieben werden. Wir haben das im Text nicht gemacht, da wir hier keine Kenntnis von Ungleichungen voraussetzen wollen.

[9] Hier gilt das in Fußnote 8 Gesagte in gleicher Weise.

- Mit $x_1 = \frac{1}{6}\left(-5 - \sqrt{12\,e^5 + 49}\right)$ ist $3\,x_1 - 1 \approx -24.889$, was nicht positiv ist. Daher ist $x_1 \notin D$. x_1 ist keine Lösung von (3.8).
- Mit $x_2 = \frac{1}{6}\left(-5 + \sqrt{12\,e^5 + 49}\right)$ ist $3\,x_2 - 1 \approx 17.889 > 0$ und $x_2 + 2 \approx 8.296 > 0$. Daher ist $x_2 \in D$. x_2 ist Lösung von (3.8).

Die Lösungsmenge von (3.8) ist $L = \{x_2\} = \{\frac{1}{6}\left(-5 + \sqrt{12\,e^5 + 49}\right)\}$.

Wie bei den Exponentialgleichungen gibt es auch bei den logarithmischen Gleichungen harmlos aussehende, wie

$$\lg x = x - 2, \qquad (3.12)$$

die nur mit numerischen Näherungsmethoden gelöst werden können.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.