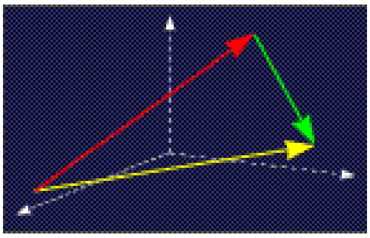
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



# Fourierreihen: Beispiele

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Anschließend an das Skriptum *Fourierreihen: Einführung* werden die Fourierreihen einiger konkreter Funktionen berechnet, und zwei weitere Anwendungen des Formalismus werden vorgestellt. In einem ergänzenden Abschnitt findet sich eine Liste oft auftretender Integrale.

## 1 Wichtige Formeln

Im Skriptum *Fourierreihen: Einführung* wurden die Grundlagen der Theorie der Fourierreihen beschrieben. Nun wollen wir uns einige Beispiele ansehen. Dabei geht es vor allem um Beispiele der Anwendung der Theorie auf konkrete Funktionen und Fragestellungen, mit dem Ziel, das mathematische Verständnis für dieses Thema zu vertiefen, Rechentechniken vorzustellen und Argumentationsweisen zu schulen. Es werden die gleichen Bezeichnungen verwendet wie im Vorgängerskriptum. Hier die wichtigsten Formeln, auf die wir uns im Folgenden beziehen.

Für eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reell- oder komplexwertige $2\pi$-periodische Funktion werden die **Fourierkoeffizienten** entweder in der Sinus-Cosinus-Form

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \tag{1.1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.3}$$

oder in der komplexen Form

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,n\,x}\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

berechnet. Wir setzen voraus, dass alle diese Integrale existieren (also vor allem, dass die Beträge der Funktionswerte von $g$ nicht irgendwo in allzu schlimmer Weise gegen $\infty$ streben). Mit diesen kann die **Fourierreihe** von $g$ entweder in der **Sinus-Cosinus-Form**

$$\widetilde{g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \tag{1.5}$$

oder in der **komplexen Form**

$$\widetilde{g}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,x} \tag{1.6}$$

gebildet werden. Ist $g$ eine gerade Funktion (d.h. $g(-x) = g(x)$ für alle $x$), so ist $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Ist $g$ eine ungerade Funktion (d.h. $g(-x) = -g(x)$ für alle $x$), so ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Die Fourierreihe einer geraden Funktion ist eine reine Cosinusreihe, die Fourierreihe einer ungeraden Funktion ist eine reine Sinusreihe[1]. Daneben gibt es noch die **spektrale Form**

$$\widetilde{g}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,x + \delta_n), \tag{1.7}$$

die man erhält, indem $A_0 = a_0$ gesetzt und die $a_n$ und $b_n$ für $n \geq 1$ gemäß

$$b_n = A_n\, \cos(\delta_n) \tag{1.8}$$

$$a_n = A_n\, \sin(\delta_n) \tag{1.9}$$

in die Amplituden $A_n$ und die Anfangsphasen $\delta_n$ umgerechnet werden. Die Abhängigkeit der Amplitude $A_n$ von $n$, d.h. die Funktion $n \mapsto A_n$ (für $n \geq 1$ oder, wenn der konstante Anteil auch erfasst werden soll, für $n \geq 0$), wird das **Amplitudenspektrum** (auch **Fourierspektrum** oder **Frequenzspektrum**) von $g$ genannt, die Funktion $n \mapsto \delta_n$ (für $n \geq 1$) das **Phasenspektrum**.

Im allgemeinen Fall ist damit über die **Konvergenz der Fourierreihe** noch nichts ausgesagt. Auf folgendes Kriterium ist aber Verlass: Ist $g$ eine $2\pi$-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion (die genaue Definition wurde im Vorgängerskriptum formuliert), so konvergiert die Fourierreihe überall, und zwar an allen Stellen $x$, an denen $g$ stetig ist, gegen $g(x)$, und an allen Unstetigkeitsstellen gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert:

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{wenn } g \text{ an der Stelle } x \text{ stetig ist} \\ \dfrac{g(x-) + g(x+)}{2} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.10}$$

Für Funktionen, die nicht (zumindest stückweise) stetig differenzierbar sind, kann für manche oder alle $x$ Konvergenz vorliegen, muss aber nicht. Wann immer die Fourierreihe für ein $x$

[1] Diese Aussagen gelten auch dann, wenn die Bedingungen $g(-x) = g(x)$ bzw. $g(-x) = -g(x)$ an einzelnen Stellen (es handelt sich dann meist um Unstetigkeitsstellen von $g$) nicht erfüllt sind.

konvergiert, sind die **Partialsummen**

$$\widetilde{g}_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) =$$
$$= \sum_{n=-k}^{k} c_n\, e^{j\,n\,x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} A_n \sin(n\,x + \delta_n) \tag{1.11}$$

Näherungswerte für ihren Grenzwert, und zwar in der Regel umso bessere, je größer $k$ (die **Ordnung** der Partialsumme) ist.

Alles bisher Gesagte lässt sich für Funktionen mit einer beliebigen Periode $T$ verallgemeinern. Der einfachste Weg, das zu tun, besteht darin, **$T$-periodische Funktionen direkt auf $2\pi$-periodische Funktionen zurückzuführen**. Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.12}$$

(einer Größe, die – physikalisch ausgedrückt – die Kreisfrequenz einer harmonischen Schwingung mit Periodendauer $T$ darstellt) wird dazu in den obigen Formeln

$$x = \omega\, t \qquad \text{oder, gleichwertig,} \qquad x = \frac{2\pi}{T}\, t \tag{1.13}$$

gesetzt, und alle Funktionen werden in Abhängigkeit von $t$ betrachtet. Die durch

$$f(t) = g(\omega\, t) \qquad \text{oder, gleichwertig,} \qquad f(t) = g\Big(\frac{2\pi}{T}\, t\Big) \tag{1.14}$$

definierte Funktion $f$ ist $T$-periodisch und besitzt die gleichen Fourierkoeffizienten wie die zuvor betrachtete Funktion $g$. Ihre Fourierreihe ist in der **Sinus-Cosinus-Form** durch

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,\omega\, t) + b_n \sin(n\,\omega\, t)\big)\,, \tag{1.15}$$

in der **komplexen Form** durch

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,\omega\, t} \tag{1.16}$$

und in der **spektralen Form** durch

$$\widetilde{f}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,\omega\, t + \delta_n) \tag{1.17}$$

gegeben.

Die Fourierkoeffizienten von $f$ können auch in diesem allgemeinen Fall direkt durch $f$ ausgedrückt werden:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \tag{1.18}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.19}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.20}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\,n\,\omega\,t}\,f(t)\,dt \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

Die oben angegebenen Beziehungen (1.1) – (1.7) für $2\pi$-periodische Funktionen können als Spezialfälle der Beziehungen (1.15) – (1.21) für $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ angesehen werden. Da der Übergang von $2\pi$-periodischen zu $T$-periodischen Funktionen mit Hilfe von (1.12) – (1.14) leicht zu bewerkstelligen ist, werden konkrete Beispiele der Fourierentwicklung meist anhand von $2\pi$-periodischen Funktionen diskutiert. In jedem Fall können Sie sich die Variable (ob sie nun $x$ oder $t$ heißt) als „Zeit“ vorstellen und die Funktionen, um die es im Folgenden gehen wird, als zeitabhängige Signale. (Dass $T = 2\pi$ im physikalischen Sinn keine Zeit und $\omega = 1$ im physikalischen Sinn keine Kreisfrequenz ist, nimmt man dabei stillschweigend in Kauf.)

Die Fourierentwicklung erlaubt es, periodische Vorgänge nicht nur im **Zeitbereich** (d.h. direkt mit Hilfe der Funktionen $f$ bzw. $g$) zu analysieren, sondern auch im **Frequenzbereich** (d.h. mit Hilfe ihrer Fourierkoeffizienten).

Für weitere Details zu den Grundlagen der Fourierreihenentwicklung konsultieren Sie bitte das Skriptum *Fourierreihen: Einführung*.

# 2 Allgemeine Tipps zur Fourierentwicklung

Typische Aufgaben beim Kennenlernen unseres Themas bestehen darin, die Fourierreihen gegebener Funktionen zu ermitteln und eventuell auch, das Ergebnis zu interpretieren, Partialsummen anzugeben und dergleichen. Dabei wird meist die Berechnung der Integrale, die die Fourierkoeffizienten darstellen, als besondere Hürde empfunden, aber auch andere Aspekte fallen zu Beginn nicht leicht. Hier eine Liste von Tipps:

- Die Bearbeitung einer Aufgabe vom Typ „entwickeln Sie die Funktion soundso in eine Fourierreihe“ sollte mit einer Orientierung über die Eigenschaften (das „Verhalten“) der gegebenen Funktion beginnen. Eine periodische Funktion wird in der Regel in einem Intervall angegeben, dessen Länge gleich der zugrunde gelegten Periode ist, mit dem Hinweis, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch ist. Dabei ist die Funktion manchmal nicht nur durch *einen* Funktionsterm angegeben, sondern stückweise (abschnittsweise) durch *mehrere* Funktionsterme. Setzen Sie diese Informationen zusammen, um sich ein Bild der Funktion zu machen! Eine Skizze oder ein Plot sind immer hilfreich.

- Bevor Sie sich den Integralen zuwenden, stellen Sie sich zwei Fragen:
  - Ist die gegebene Funktion – zumindest abgesehen von ihrem Verhalten an einzelnen (Unstetigkeits-)Stellen – gerade oder ungerade oder weder noch? Ist sie gerade, so wissen Sie bereits, dass $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt. Ist sie ungerade, so wissen Sie bereits, dass $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$ gilt. Es kann auch der Fall sein, dass die Funktion $g$, die in eine Fourierreihe entwickelt werden soll, von der Form $g(x) = q + h(x)$ ist mit einer ungeraden Funktion $h$. (Geometrisch bedeutet das, dass der Graph von $g$ durch eine Verschiebung parallel zur zweiten Achse in den Graphen einer ungeraden Funktion verwandelt werden kann.) Dann gilt $a_0 = 2q$ und $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$.
  - Ist die Funktion mit einer anderen Funktion verwandt, deren Fourierreihe Sie bereits kennen (und als bekannt voraussetzen dürfen)? Ergibt sich daraus vielleicht eine Möglichkeit, die gesuchte Fourierreihe sogleich hinzuschreiben, ohne ein Integral auszurechnen? Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die gegebene Funktion $g$ aus einer Funktion $h$, deren Fourierreihe man bereits kennt, durch eine der folgenden Transformationen hervorgeht:

    $g(x) = q\,h(x)$. In diesem Fall multiplizieren Sie die Fourierreihe von $h$ einfach gliedweise mit $q$.

    $g(x) = h(x) + q$. In diesem Fall addieren Sie zur Fourierreihe von $h$ einfach $q$.

    $g(x) = h(q\,x)$ für eine reelle Zahl $q > 0, q \neq 1$. In diesem Fall ersetzen Sie $x$ in einem Ausdruck für die Fourierreihe von $h$ durch $q\,x$. Achtung: Die Perioden von $g$ und $h$ sind verschieden! Die Periode von $g$ ist gleich dem $\frac{1}{q}$-fachen der Periode von $h$. Eine solche Situation liegt insbesondere dann vor, wenn eine $2\pi$-periodische Funktion auf eine beliebige andere Periode „gedehnt“ oder „gestaucht“ werden soll. Unsere Konvention (1.12) – (1.14) ist auf diesen Fall (mit $q = \omega$ und den Bezeichnungen $t$ statt $x$, $f$ statt $g$ und $g$ statt $h$) zugeschnitten.

- Nun geht es an die Berechnung jener Integrale, die nach Beachtung der vorigen Punkte noch nicht bekannt sind. Ist die zu entwickelnde Funktion innerhalb eines Intervalls von der Länge der zugrunde gelegten Periode stückweise durch mehrere Funktionsterme gegeben, so müssen die Integrale entsprechend zerlegt werden. Für die Berechnung der Teilintegrale, die jeweils nur einen Funktionsterm betreffen, gibt es zahlreiche Hilfsmittel:
  - Falls es Ihnen gestattet ist, benutzen Sie ein Computeralgebra-System!
  - In vielen Lehrbüchern und Webseiten finden Sie Listen von Integralen, die bei der Fourierentwicklung häufig auftreten. Nutzen Sie sie! Im ergänzenden Abschnitt 11 sind einige von ihnen angeführt. Wir werden sie in den nun folgenden Beispielen benutzen.
  - Falls von Ihnen erwartet wird, dass Sie alle Integrale auf dem Papier selbst ausrechnen, so müssen Sie die Methoden, die die Integralrechnung bereitstellt, anwenden. Konsultieren Sie dazu das Skriptum *Integrieren – kurz und bündig*.

Falls Sie beim Integrieren unsicher sind, so empfehlen wir Ihnen, sich zuerst einmal den Abschnitt 11 mit der Liste von Integralen und ein paar zusätzlichen Tipps anzusehen, bevor Sie zu den Beispielen übergehen.

# 3 Beispiel Kippschwingung

Die Entwicklung einer $2\pi$-periodischen Kippschwingung in eine Fourierreihe (der Sinus-Cosinus-Form) wurde bereits im Skriptum *Fourierreihen: Einführung* als (einziges) Beispiel durchgerechnet und diskutiert. Wir behandeln dieses Beispiel hier noch einmal, werden die auftretenden Integrale aber nicht „händisch" berechnen, sondern mit Hilfe der in Abschnitt 11 angegebenen Liste. Wir modellieren eine Kippschwingung mit Periode $2\pi$ und Werten zwischen $-\pi$ und $\pi$ mit Hilfe der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } -\pi < x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Abbildung 1 zeigt oben links den Graphen der auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ definierten Funktion $x \mapsto x$ (entspricht der ersten Zeile von (3.1)) und oben rechts die periodische Fortsetzung. $g$ ist stückweise stetig differenzierbar, aber unstetig und (abgesehen von den Unstetigkeitsstellen) eine ungerade Funktion, daher ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Wir müssen also nur die Fourierkoeffizienten $b_n$ ermitteln:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, x\, dx \overset{(11.38)}{=} \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \tag{3.2}$$

Fertig! Die Fourierreihe von $g$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x) = \\ &= 2 \left( \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} - \dots \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

An den Unstetigkeitsstellen von $g$ konvergiert sie gegen den Mittelwert aus dem linksseitigen Grenzwert $\pi$ und dem rechtsseitigen Grenzwert $-\pi$ (also gegen $0$), überall sonst konvergiert sie gegen den Funktionswert $g(x)$. Abbildung 1 unten zeigt die Partialsummen der Ordnung $6$ und $12$. Das hier auftretende Gibbssche Phänomen (Über- und Unterschwingen in der Nähe der Unstetigkeitsstellen) haben wir bereits im Vorgängerskriptum beobachtet.

# 4 Beispiele: Varianten der Kippschwingung

Kippschwingungen können auch anders als in (3.1) modelliert werden. Sollen die Werte einer Kippschwingung zwischen $0$ und $2\pi$ liegen, also nirgends negativ sein, so könnte man statt (3.1) die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{wenn } -\pi < x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.1}$$

betrachten. Ihr Graph ist in Abbildung 2 oben (links: eingeschränkt auf das Intervall $(-\pi, \pi]$, rechts: die periodische Fortsetzung) zu sehen. Was tun, wenn sie in eine Fourierreihe entwickelt werden soll? Dabei nehmen wir an, dass (3.3) nicht zuvor berechnet wurde. Die Funktion

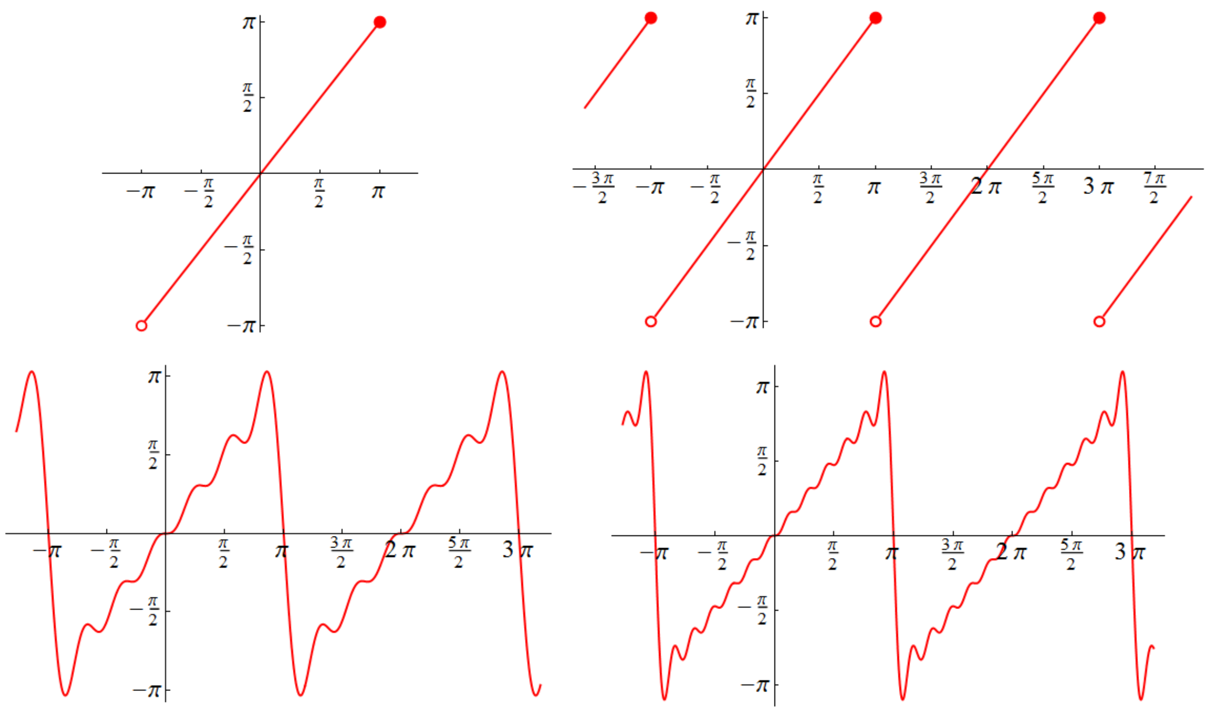



**Abbildung 1:** Oben links: Graph der auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ definierten Funktion $x \mapsto x$ (entspricht der ersten Zeile von (3.1)). Oben rechts: Graph der periodischen Fortsetzung, d.h. der Funktion (3.1). Unten: Graphen der Partialsummen von (3.3) zur Ordnung $6$ (links) und $12$ (rechts).

$h$ ist weder gerade noch ungerade. Es sollte aber auffallen, dass der um $-\pi$ parallel zur zweiten Achse verschobene Graph zu einer ungeraden Funktion gehört (abgesehen von den Unstetigkeitsstellen, was aber keine Rolle spielt). Das bedeutet, dass

$$h(x) = \pi + g(x) \tag{4.2}$$

ist, mit $g$ von (3.1). Wir können die Summanden $\pi$ und $g(x)$ getrennt betrachten. Die konstante Funktion $x \mapsto \pi$ ist ihre eigene Fourierreihe, und $g$ ist eine ungerade Funktion. Entwickeln wir $g$ wie oben in eine Fourierreihe – oder übernehmen einfach (3.3) –, so können wir die Fourierreihe von $h$ sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(x) &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\,\sin(n\,x) = \\ &= \pi + 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} - \dots\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Integrale für $a_n$ (mit $n \geq 1$) mussten bei dieser Betrachtungsweise nicht einmal angeschrieben werden, da von vonherein klar war, dass sie gleich $0$ sind. Versuchen Sie, wann immer es möglich ist, sich die Arbeit auf diese oder eine ähnliche Weise zu erleichtern!

Nun betrachten wir eine allgemeinere Kippschwingung. Ihre Periode soll $T$ sein, und sie soll Werte zwischen $-q$ und $q$ (für ein beliebiges $q > 0$) annehmen. Wir modellieren sie in der

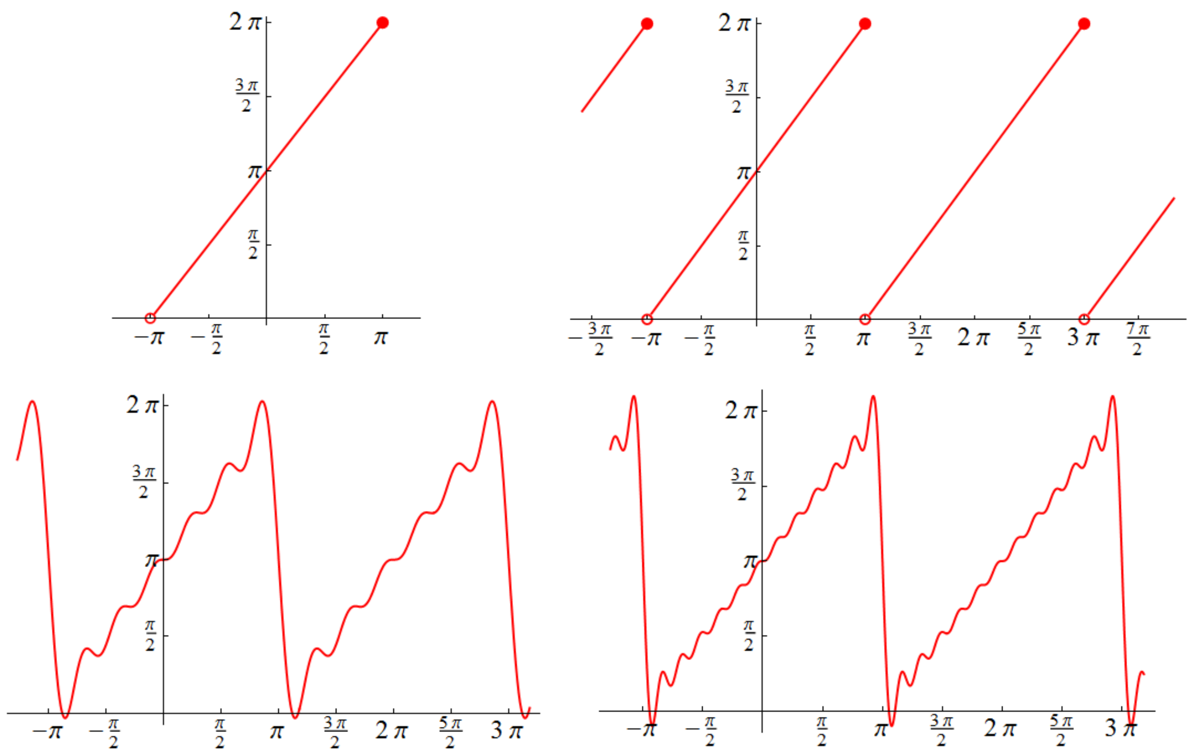



**Abbildung 2:** Oben links: Graph der auf dem Intervall $(-\pi,\pi]$ definierten Funktion $x \mapsto x+\pi$ (entspricht der ersten Zeile von (4.1)). Oben rechts: Graph der periodischen Fortsetzung, d.h. der Funktion (4.1). Unten: Graphen der Partialsummen von (4.3) zur Ordnung $6$ (links) und $12$ (rechts).

Form

$$f(t) = \begin{cases} 2\,q\,\dfrac{t}{T} & \text{wenn } -\dfrac{T}{2} \le t < \dfrac{T}{2} \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.4}$$

(Setzen Sie $t = -\frac{T}{2}$ und $t = \frac{T}{2}$ in den Ausdruck $2\,q\,\frac{t}{T}$ ein, um sich zu vergewissern, dass die Werte von $f$ tatsächlich zwischen $-q$ und $q$ liegen!) Zunächst mag auffallen, dass jetzt im Unterschied zu (3.1) die linken Randpunkte der Stetigkeitsintervalle zum Graphen gehören und nicht die rechten. Aber dieser belanglose Unterschied sollte uns nicht davon abhalten, die Fourierreihe von (4.4) auf jene von (3.1) zurückzuführen. Die Periode ist nun $T$, was bedeutet, dass $\omega\,t$, d.h. $\frac{2\pi}{T}\,t$, der Variable $x$ entspricht. Wir können also $\frac{2\pi}{T}\,t$ anstelle von $x$ in (3.3) einsetzen. Die Funktion, die dadurch dargestellt wird, ist in der gewünschten Weise (in Richtung der ersten Achse) gestreckt bzw. gestaucht und hat die Periode $T$. Aber sie nimmt nach wie vor Werte zwischen $-\pi$ und $\pi$ an, was bedeutet, dass wir das Ergebnis noch zusätzlich mit $\frac{q}{\pi}$ multiplizieren müssen. Ohne weitere Berechnung können wir also hinschreiben:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \frac{2q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,n\,t\right) = \\ &= \frac{2q}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t\right) - \frac{1}{2}\,\sin\left(\frac{4\pi}{T}\,t\right) + \frac{1}{3}\,\sin\left(\frac{6\pi}{T}\,t\right) - \frac{1}{4}\,\sin\left(\frac{8\pi}{T}\,t\right) + \dots\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Das gleiche Ergebnis hätte man natürlich auch durch Berechnung der entsprechenden Integrale (1.20) erhalten können. Dabei wäre der Übergang von der Variable $t$ zur Variable $x = \frac{2\pi}{T}\, t = \omega\, t$ in der Form $t = \frac{T}{2\pi}\, x$ und $dt = \frac{T}{2\pi}\, dx$ als Transformation der Integrationsvariablen aufgetreten, sodass man, wie in (3.2), Formel (11.38) benutzt hätte:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n \underbrace{\omega\, t}_{x})\, 2\, q\, \underbrace{\frac{t}{T}}_{\frac{x}{2\pi}}\, \underbrace{dt}_{\frac{T}{2\pi}\, dx} = \frac{q}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\, x)\, x\, dx \stackrel{(11.38)}{=}$$

$$\stackrel{(11.38)}{=} \frac{q}{\pi^2}\, \frac{2\pi}{n}\, (-1)^{n+1} = \frac{2q}{\pi}\, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \tag{4.6}$$

Die damit gebildete Fourierreihe ist genau (4.5).

Um zu einer Kippschwingung überzugehen, die Werte zwischen $0$ und $2q$ annimmt, addieren wir einfach die Konstante $q$ zu (4.5).

Unsere letzte Variante einer Kippschwingung: Eine $2\pi$-periodische Kippschwingung mit Werten zwischen $0$ und $2\pi$ kann anstelle von (4.1) auch durch eine Funktion $k$ modelliert werden, die bei $x = 0$ zu steigen beginnt und bei $x = 2\pi$ wieder auf den Wert $0$ abfällt:

$$k(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } 0 \le x < 2\pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Sie ist (abgesehen von den Werten an den Unstetigkeitsstellen) im Vergleich zu (4.1) nur in $x$-Richtung um $\pi$ verschoben. Zeichnen Sie ihren Graphen selbst! Um ihre Fourierreihe zu ermitteln, empfiehlt es sich, in den Formeln (1.1) – (1.3) das Integrationsintervall durch $[0, 2\pi]$ zu ersetzen. Wir berechnen

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \tag{4.8}$$

und für $n \ge 1$

$$a_n \stackrel{(11.46)}{=} 0 \tag{4.9}$$

$$b_n \stackrel{(11.47)}{=} -\frac{2}{n}. \tag{4.10}$$

Fertig! Die Fourierreihe ist gegeben durch

$$\widetilde{k}(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n\, x) =$$

$$= \pi - 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right). \tag{4.11}$$

Man hätte sie auch aus (4.3) durch die Ersetzung $x \to x + \pi$ (oder, gleichwertig, $x \to x - \pi$) und die nachfolgende Vereinfachung der auftretenden Terme $\sin(n\, x + n\, \pi)$ zu $\pm \sin(n\, x)$ (mit $+$ für gerades $n$ und $-$ für ungerades $n$) erhalten können. Dahinter steckt die **allgemeine Regel, dass eine Verschiebung einer $2\pi$-periodischen Funktion in $x$-Richtung um $\pi$ oder $-\pi$ der Multiplikation der Fourierkoeffizienten mit $(-1)^n$ entspricht**. Wir sind ihr bereits im Vorgängerskriptum begegnet (siehe dort die Tabelle im Abschnitt „Einige weitere Eigenschaften der Fourierreihe“).

# 5 Beispiel: Dreiecksschwingung

Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{wenn } -\pi < x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.1}$$

stellt eine $2\pi$-periodische Dreiecksschwingung dar. Sie ist stückweise stetig differenzierbar und, wie ihr Graph in Abbildung 3 (oben) zeigt, eine gerade stetige Funktion. Daraus schließen wir erstens, dass $b_n = 0$ für alle $n$, und zweitens, dass sie an allen Stellen $x$ durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Um letztere in der Sinus-Cosinus-Form zu ermitteln, berechnen wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx \overset{(11.62)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi \tag{5.2}$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,|x|\, dx \overset{(11.62)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\,x)\,x\, dx \overset{(11.18)}{=} \\ &\overset{(11.18)}{=} -\frac{2}{n^2\,\pi}\big(1-(-1)^n\big) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{4}{n^2\,\pi} & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Daher ist die Fourierreihe von $g$ durch

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \frac{\cos(7x)}{49} + \frac{\cos(9x)}{81} + \dots\right) \tag{5.4}$$

gegeben. Will man sie in geschlossener Form mit dem Summensymbol anschreiben, so ist es am einfachsten, die ungeraden natürlichen Zahlen in der Form $n = 2k+1$ darzustellen. (Für $k = 0$ bekommt man $n = 1$, für $k = 1$ bekommt man $n = 3$, für $k = 2$ bekommt man $n = 5$, usw.) Damit ist

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,\cos\big((2k+1)\,x\big). \tag{5.5}$$

Abbildung 3 (unten) zeigt die Partialsummen zur Ordnung $3$ (mit nur zwei Cosinus-Beiträgen!) und $9$ (mit fünf Cosinus-Beiträgen). Die Reihe konvergiert hier im Vergleich zu jener der Kippschwingung sehr schnell. Diese Eigenschaft ist der Stetigkeit der Funktion (5.1) zu verdanken. Sie folgt auch daraus, dass sich die (nichtverschwindenden) Amplituden für große $n$ wie $A_n \sim \frac{1}{n^2}$ verhalten und daher schneller klein werden als die Amplituden der Kippschwingung, für die $A_n \sim \frac{1}{n}$ gilt.

# 6 Beispiel: Rechtecksschwingung

Eine Rechtecksschwingung springt abrupt zwischen zwei Werten hin und her. Wir modellieren eine $2\pi$-periodische Rechtecksschwingung durch die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{wenn } 0 < x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.1}$$

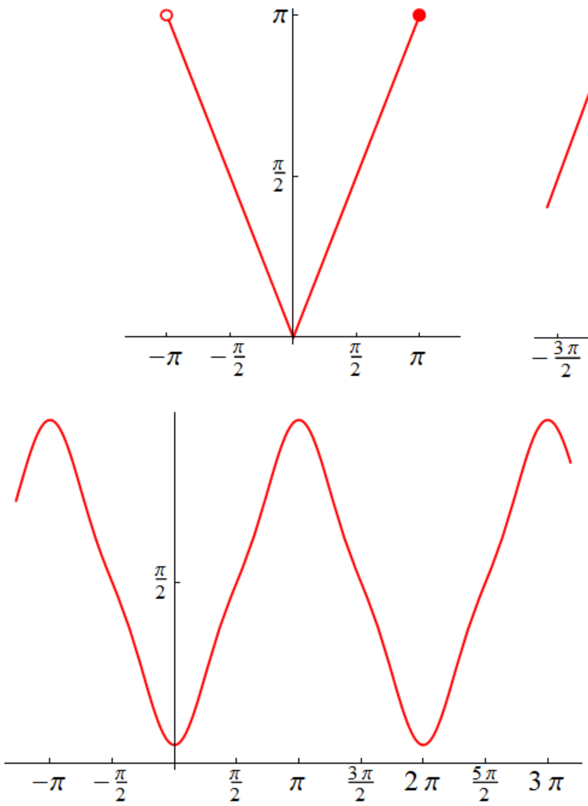



**Abbildung 3:** Oben links: Graph der auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ definierten Funktion $x \mapsto |x|$ (entspricht der ersten Zeile von (5.1)). Oben rechts: Graph der periodischen Fortsetzung, d.h. der Funktion (5.1). Unten: Graphen der Partialsummen von (5.5) zur Ordnung $3$ (links) und $9$ (rechts).

Ihr Graph ist in Abbildung 4 (oben) dargestellt. Sie ist stückweise stetig differenzierbar, aber unstetig. Abgesehen von den Werten an den Unstetigkeitsstellen ist sie eine ungerade Funktion, daher gilt $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Um

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx \tag{6.2}$$

zu berechnen, bemerken wir, dass der Integrand gerade ist (ungerade Funktion mal ungerade Funktion = gerade Funktion), daher

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx \overset{(11.62)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\,x)\, dx \overset{(11.16)}{=} \frac{2}{n\,\pi} \left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{4}{n\,\pi} & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Wie im vorigen Beispiel stellen wir die ungeraden natürlichen Zahlen in der Form $n = 2k + 1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ dar und können damit die Fourierreihe von $g$ in Sinus-Cosinus-Form anschreiben:

$$\widetilde{g}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,\sin\left((2k+1)\,x\right) = \\ = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\right). \qquad (6.4)$$

Abbildung 4 (unten) zeigt die Partialsummen zur Ordnung $13$ (mit $7$ Sinus-Beiträgen) und $41$ (mit $21$ Sinus-Beiträgen). Aufgrund der Unstetigkeit der Funktion (6.1) geht die Konvergenz der Fourierreihe eher schleppend vonstatten, was auch durch das Verhalten $A_n \sim \frac{1}{n}$ der nichtverschwindenden Amplituden zum Ausdruck kommt. An den Unstetigkeitsstellen (das sind alle ganzzahligen Vielfachen von $\pi$) konvergiert die Fourierreihe gegen $0$ (den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert).

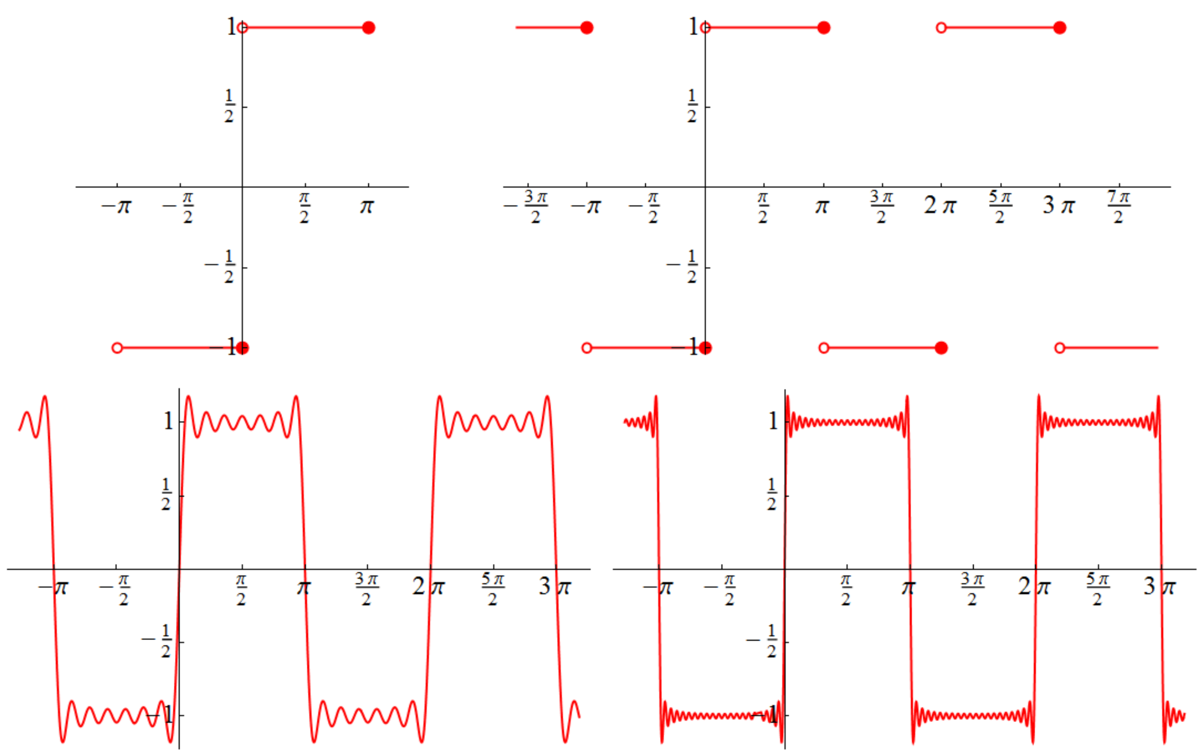


**Abbildung 4:** Oben: Graph der Funktion (6.1). Links: eingeschränkt auf das Intervall $(-\pi, \pi]$. Rechts: die periodische Fortsetzung. Unten: Graphen der Partialsummen von (6.4) zur Ordnung $13$ (links) und $41$ (rechts).

# 7 Beispiel: Stückweise quadratische Funktion

Als vorletztes Beispiel der Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Fourierreihe betrachten wir nun eine Funktion mit Periode $1$, die in jedem Intervall mit aufeinander folgenden ganzzahligen Randstellen quadratisch ist:

$$\rho(y) = \begin{cases} y\,(1-y) & \text{wenn } 0 \leq y < 1 \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.1}$$

Damit Sie sich nicht allzu sehr an $x$ und $t$ als Variablennamen und $g$ und $f$ als Funktionsnamen gewöhnen, haben wir nun die Bezeichnungen $y$ und $\rho$ gewählt. Die Funktion $\rho$ ist stückweise stetig differenzierbar. Aus Abbildung 5 (oben), zusammen mit der Erkenntnis, dass der Term $y\,(1-y)$ auch in der Form $-(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ geschrieben werden kann, folgt, dass der Graph von $\rho$ aus nach unten offenen Parabelstücken besteht, die an allen ganzzahligen Werten von $y$ gleich $0$ sind. Daher ist $\rho$ gerade und stetig, woraus $b_n = 0$ für alle $n$ folgt. Zur Ermittlung der verbleibenden Fourierkoeffizienten verwenden wir (1.18) und (1.19) mit $T = 1$ und $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Das Integrationsintervall verschieben wir auf $[0,1]$ und berechnen

$$a_0 = 2\int_0^1 \rho(y)\,dy = 2\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \frac{1}{3} \tag{7.2}$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 \cos(2\pi\,n\,y)\,\rho(y)\,dy = 2\int_0^1 \cos(2\pi\,n\,y)\,(y-y^2)\,dy = \\ &= 2\int_0^1 \cos(2\pi\,n\,y)\,y\,dy - 2\int_0^1 \cos(2\pi\,n\,y)\,y^2\,dy. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Mit der Variablensubstitution $y = \frac{x}{2\pi}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,x\,dx - \frac{1}{4\pi^3}\int_0^{2\pi} \cos(n\,x)\,x^2\,dx = \\ &\overset{\text{(11.46) und (11.49)}}{=} 0 - \frac{1}{4\pi^3}\,\frac{4\pi}{n^2} = -\frac{1}{n^2\pi^2}\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Daher ist die Fourierreihe unserer Funktion in Sinus-Cosinus-Form durch

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(y) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\cos(2\pi\,n\,y) = \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\cos(2\pi\,y) + \frac{\cos(4\pi\,y)}{4} + \frac{\cos(6\pi\,y)}{9} + \frac{\cos(8\pi\,y)}{16} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{7.5}$$

gegeben. Abbildung 5 (unten) zeigt die Partialsummen zur Ordnung $3$ und $10$. Wie bei der Dreiecksschwingung zeigt das Verhalten $A_n \sim \frac{1}{n^2}$ der Amplituden an, dass die Fourierreihe rasch konvergiert – eine Eigenschaft, die sie der Stetigkeit von $\rho$ verdankt.

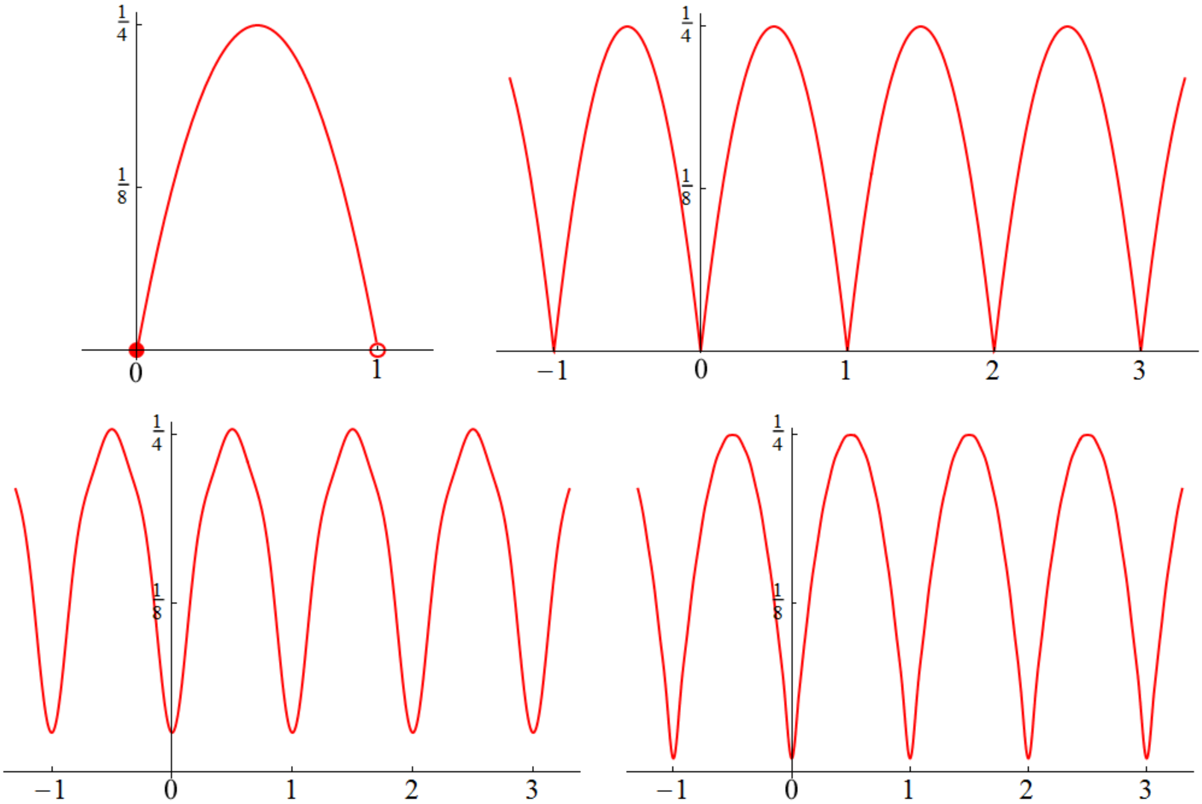



**Abbildung 5:** Oben links: Graph der auf dem Intervall $[0, 1)$ definierten Funktion $y \mapsto y\,(1-y)$ (entspricht der ersten Zeile von (7.1)). Oben rechts: Graph der periodischen Fortsetzung, d.h. der Funktion (7.1). Unten: Graphen der Partialsummen von (7.5) zur Ordnung $3$ (links) und $10$ (rechts).

# 8 Beispiel: Kippschwingung mit Pause

Zuletzt wollen wir noch ein Beispiel einer Fourierreihe betrachten, zu der sowohl Sinus- als auch Cosinusfunktionen beitragen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } -\pi < x < 0 \\ x & \text{wenn } 0 \le x \le \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8.1}$$

Sie verhält sich ähnlich wie eine Kippschwingung, legt aber vor dem Ansteigen immer eine Pause von einer halben Periode ein. Sie ist stückweise stetig differenzierbar, aber unstetig. Ihr Graph ist in Abbildung 6 (oben) gezeigt. Ihre Periode ist $2\pi$, und sie ist weder gerade noch ungerade. Wir berechnen ihre Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{8.2}$$

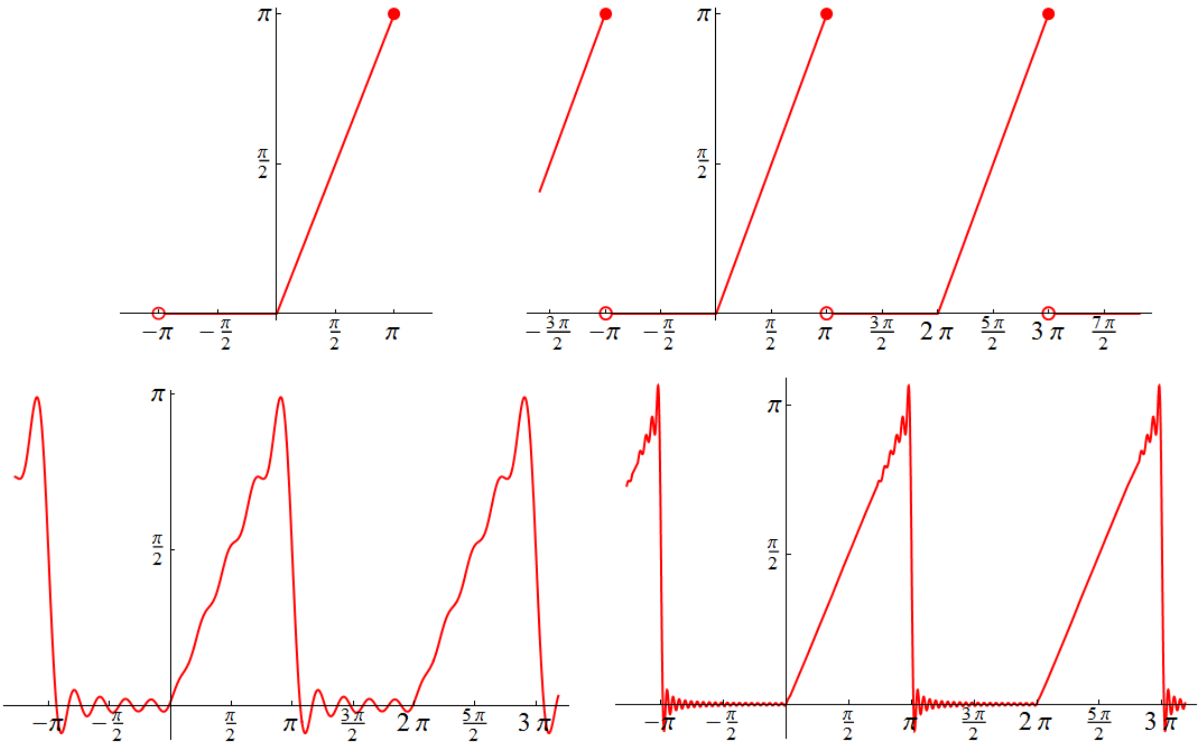



**Abbildung 6:** Oben links: Graph der durch die ersten zwei Zeilen von (8.1) auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ definierten Funktion. Oben rechts: Graph der periodischen Fortsetzung, d.h. der Funktion (8.1). Unten: Graphen der Partialsummen von (8.5) zur Ordnung $9$ (links) und $41$ (rechts).

und für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\,x)\, x\, dx \overset{(11.18)}{=}$$

$$\overset{(11.18)}{=} -\frac{1}{n^2\pi} \left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{8.3}$$

sowie

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\,x)\, x\, dx \overset{(11.19)}{=} \frac{1}{n} (-1)^{n+1}. \tag{8.4}$$

Nun stellen wir die ungeraden natürlichen Zahlen wieder in der Form $n = 2k+1$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ dar und schreiben die Sinus- und die Cosinus-Anteile der Fourierreihe von $g$ jeweils als eigene Reihe[2] an:

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\big((2k+1)\,x\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \ldots \tag{8.5}$$

[2] Es ist nicht selbstverständlich, dass man das darf, aber es kann streng mathematisch gerechtfertigt werden.

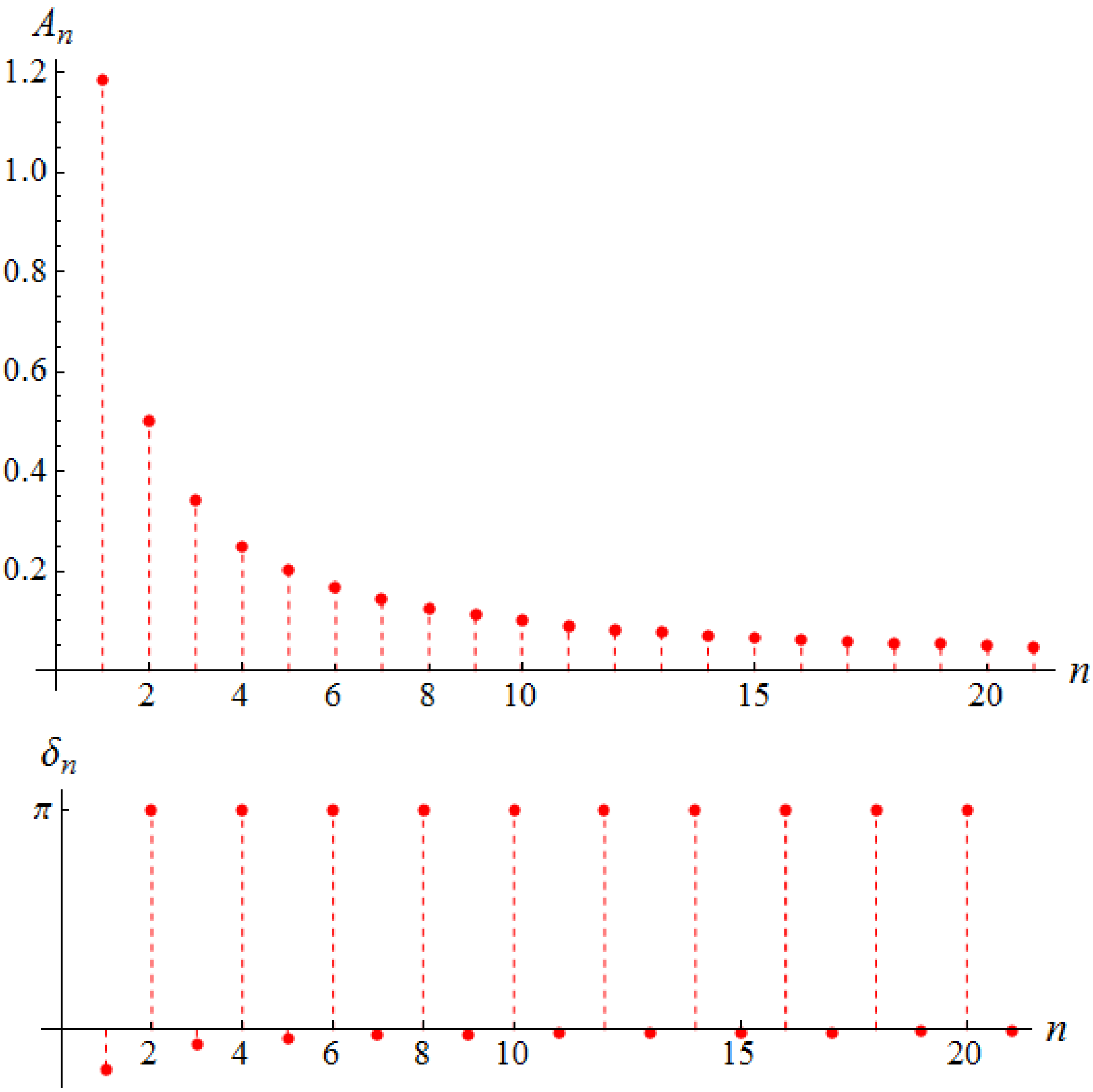



**Abbildung 7:** Amplitudenspektrum (oben) und Phasenspektrum (unten) der Funktion (8.1).

Abbildung 6 (unten) zeigt die Graphen der Partialsummen zur Ordnung $9$ und $41$.

Sehen wir uns zur Abrundung noch die Spektren der „Kippschwingung mit Pause“ an: Für gerades $n \geq 2$ ist $a_n = 0$ und $b_n = -\frac{1}{n}$. Für ungerades $n \geq 1$ ist $a_n = -\frac{2}{n^2\pi}$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Mit den im Vorgängerskriptum angegebenen Methoden finden wir für $n \geq 1$

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{4}{n^4\pi^2}} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{8.6}$$

und

$$\delta_n = \begin{cases} \pi & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \operatorname{atan}\left(-\frac{2}{n\pi}\right) & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{8.7}$$

Abbildung 7 zeigt das Amplituden- und das Phasenspektrum.

# 9 Beispiel: Ein Weichzeichner für Funktionen

In der Bildverarbeitung werden mathematische Techniken verwendet, die entfernt mit Fourierreihen zu tun haben. Eine solche Technik steckt hinter dem „Weichzeichnen“ (dem Unscharfmachen) eines Bildes. Wir werden jetzt nicht darauf eingehen, wie das in der Praxis bewerkstelligt wird, sondern eine Methode vorstellen, die ähnlich funktioniert, aber nicht auf Bildinformationen, sondern auf periodische Funktionen, wie wir sie bisher betrachtet haben, angewandt wird. Dabei werden wir die komplexe Form der Fourierreihe verwenden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf $2\pi$-periodische Funktionen. Die Fourierkoeffizienten $c_n$ der komplexen Form (1.6) der Fourierreihe können entweder mittels (1.4) als Integral berechnet oder durch die Koeffizienten der Sinus-Cosinus-Form gemäß

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{9.1}$$

und für $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - j\,b_n) \tag{9.2}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + j\,b_n) \tag{9.3}$$

ausgedrückt werden. Umgekehrt gilt $a_0 = 2c_0$ und für $n \geq 1$

$$a_n = c_n + c_{-n} \tag{9.4}$$

$$b_n = j\,(c_n - c_{-n}). \tag{9.5}$$

Damit kann leicht von der Sinus-Cosinus-Form in die komplexe Form und umgekehrt umgerechnet werden.

Unter den bisher in eine Fourierreihe entwickelten Funktionen sind etliche unstetig. Sie weisen Sprungstellen auf. Nehmen wir an, dass unstetige Funktionen für irgendeine Anwendung ungünstig sind. Daher die Frage: Gibt es eine einfach handhabbare Möglichkeit, eine periodische Funktion $g$ so zu modifizieren, dass Sprünge, die abrupte Änderungen darstellen, durch stetige Änderungen ersetzt werden? Dabei soll aber die modifizierte Funktion, wenn man sie auf Skalen betrachtet, die größer als eine vorgegebene positive Zahl $\varepsilon$ sind, den Charakter der ursprünglichen Funktion beibehalten. Das ist ein bisschen so, als würde man jedes einzelne Pixel eines Bildes über ein Gebiet der Größe $\varepsilon$ „verschmieren“. Es wären dann keine Details mehr erkennbar, die kleiner als $\varepsilon$ sind, aber wenn man etwas zurücktritt, sieht das Bild ähnlich aus wie vorher, nur ein bisschen „weichgezeichnet". Was wir uns also wünschen, ist ein „Weichzeichner für Funktionen". Interpretieren wir die Variable $x$ als Zeit und die gegebene Funktion $g$ als Signal, so sollen abrupte Sprünge des Signals, die zu genau definierten Zeiten stattfinden (entsprechend einem scharfen Bild), durch stetige Vorgänge der Dauer $\varepsilon$ (entsprechend einem weichgezeichneten Bild) „verwischt" werden. Der Wert von $\varepsilon$ soll dabei frei gewählt werden können.

Eine Möglichkeit, eine solche Wirkung zu erzielen, ist die folgende: Wir ersetzen den Funktionswert an jeder Stelle $x$, also $g(x)$, durch eine Art Mittelwert aller Funktionswerte an jenen Stellen, die im Intervall $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ liegen[3]. Den Mittelwert im üblichen Sinn ("Summe dividiert durch Anzahl") kann man von allen (unendlich vielen) Zahlen eines Intervalls natürlich nicht bilden, aber was dem Konzept des Mittelwerts am nächsten kommt, ist „das Integral dividiert durch die Intervalllänge". Definieren wir also die modifizierte Funktion $g_\varepsilon$ durch

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g(\xi)\, d\xi. \tag{9.6}$$

Ist $\varepsilon < \pi$, was wir im Folgenden annehmen, so kann das Integral (9.6) auch in der Form

$$g_\varepsilon(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\, w(x-\xi)\, d\xi \tag{9.7}$$

geschrieben werden, wobei die $2\pi$-periodische Funktion $w$ durch

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{wenn } -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 0 & \text{sonst innerhalb von } [-\pi, \pi) \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{außerhalb von } [-\pi, \pi) \end{cases} \tag{9.8}$$

definiert ist. Der Beweis der Gleichheit von (9.6) und (9.7) ist leicht, wenn $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ ganz im Intervall $[-\pi, \pi]$ enthalten ist, d.h. wenn $x$ von den Randstellen $\pm\pi$ des Integrationsintervalls $[-\pi, \pi]$ einen Sicherheitsabstand von mindestens $\varepsilon$ hält. Ist das nicht der Fall, so ist die Rechnung etwas komplizierter, und man muss die Periodizität sowohl von $g$ als auch von $w$ verwenden.

Die Kombination zweier $2\pi$-periodischer Funktionen $g$ und $w$ in der Form (9.7) wird **Faltung** genannt und mit dem Symbol $\star$ bezeichnet. Man schreibt also $g_\varepsilon = g \star w$ und nennt $g_\varepsilon$ die Faltung von $g$ und $w$. Die Faltung ist symmetrisch ($g \star w = w \star g$) und führt stets wieder auf eine $2\pi$-periodische Funktion.

Nun bringen wir die Fourierreihen ins Spiel. Wir entwickeln $g$ und $w$ in eine Fourierreihe, und zwar in die komplexe Form. Die Fourierkoeffizienten von $g$ bezeichnen wir mit $c_n$. Sie

[3] Genau genommen verschmieren wir damit die Information, die in einem Funktionswert von $g$ steckt, auf ein Intervall der Größe $2\varepsilon$. Durch den Faktor $2$ werden einige der nachfolgenden Ausdrücke einfacher.

charakterisieren die Funktion, die weichgezeichnet werden soll. Die Fourierkoeffizienten von $w$ bezeichnen wir mit $d_n$. Mit (1.4) können wir sie leicht berechnen:

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\, dx = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\, 2\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \tag{9.9}$$

und für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,n\,x}\, w(x)\, dx = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-j\,n\,x}\, dx \overset{(11.8)}{=} \\ \overset{(11.8)}{=} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\, \frac{e^{-j\,n\,x}}{-j\,n}\bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\,n\,\varepsilon}\, \underbrace{\frac{e^{j\,n\,\varepsilon} - e^{-j\,n\,\varepsilon}}{2\,j}}_{\sin(n\,\varepsilon)} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{\sin(n\,\varepsilon)}{n\,\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Hier tritt die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ auf. Sie ist für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ definiert. An der Stelle $x = 0$ macht der Term $\frac{\sin(x)}{x}$ keinen Sinn, aber für $x \to 0$ strebt er gegen $1$, was gut zu (9.9) passt. Um auch einen ordentlichen Funktionswert an der Stelle $0$ festzulegen, führen wir die für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \tag{9.11}$$

ein. Sie heißt **Spaltfunktion**[4] oder **Sinus cardinalis** und wird manchmal auch mit dem Symbol $\mathrm{sinc}$ abgekürzt. Ihr Graph ist in Abbildung 8 dargestellt. Mit ihrer Hilfe können wir die Fourierkoeffizienten von $w$ einheitlich in der Form

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{si}(n\,\varepsilon) \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \tag{9.12}$$

anschreiben.

Und jetzt kommt der springende Punkt: Im Vorgängerskriptum wurde in der Tabelle im Abschnitt „Einige weitere Eigenschaften der Fourierreihe“ zum Ausdruck gebracht, dass **die Fourierkoeffizienten einer Faltung gleich $2\pi$ mal dem Produkt der Fourierkoeffizienten der gefalteten Funktionen sind**. (Wir bitten Sie, das ohne Beweis zu glauben.) Die Fourierkoeffizienten von $g_\varepsilon$ sind daher durch

$$2\pi\, d_n\, c_n = 2\pi\, \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{si}(n\,\varepsilon)\, c_n = \mathrm{si}(n\,\varepsilon)\, c_n \tag{9.13}$$

gegeben. Nun sind wir dort angelangt, wo wir Sie hinführen wollten: Die Wirkung unseres **Weichzeichners für Funktionen** nimmt, wenn man sie durch Fourierreihen ausdrückt, die einfache Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,x} \quad \overset{\text{weichzeichnen}}{\longrightarrow} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{si}(n\,\varepsilon)\, c_n\, e^{j\,n\,x} \tag{9.14}$$

[4] Dieser Name rührt daher, dass sie bei der Beschreibung der Beugung von Licht an einem Spalt auftritt.

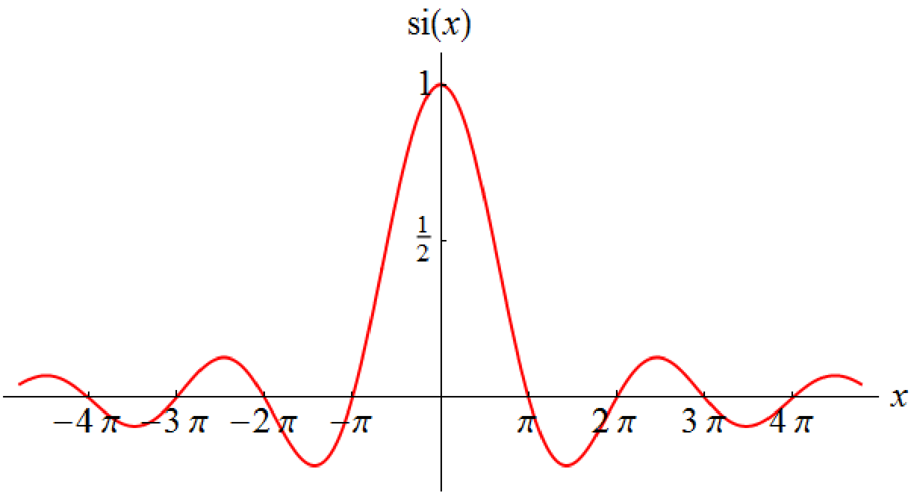



**Abbildung 8:** Graph der Funktion (9.11).

an. Sie besteht lediglich darin, den zum Summationsindex $n$ gehörenden Beitrag mit $\mathrm{si}(n\,\varepsilon)$ zu multiplizieren. Je größer der Betrag von $n$ ist, umso kleiner sind die Werte, die $|\mathrm{si}(n\,\varepsilon)|$ annehmen kann. Für $n \to \infty$ und $n \to -\infty$ strebt $\mathrm{si}(n\,\varepsilon)$ gegen $0$. Daher werden durch unseren Weichzeichner die Beiträge der Fourierreihe (außer dem konstanten Anteil $c_0$) „gedämpft", und zwar umso stärker, je größer $n$ ist. Man sagt auch, dass die höheren Frequenzen unterdrückt werden[5]. Die Wahl von $\varepsilon$ erlaubt die Kontrolle über die Größe der Bereiche, über die die Funktion $g$ verschmiert wird, wobei wir die bisherige Bedingung $0 < \varepsilon < \pi$ zu $0 \le \varepsilon \le \pi$ abschwächen können:

- Für $\varepsilon = 0$ wird wegen $\mathrm{si}(0) = 1$ nicht weichgezeichnet. Es gilt also $g_0(x) = g(x)$ für alle $x$ (ausgenommen allfällige Unstetigkeitsstellen von $g$, an denen die Fourierreihe von $g$ nicht mit $g$ übereinstimmt).
- Ist $\varepsilon$ sehr klein, aber positiv, so wirkt sich die Dämpfung nur für sehr große $n$ merklich aus.
- Je größer $\varepsilon$ ist, umso mehr wirkt sich die Dämpfung auch für kleine $n$ aus, d.h. umso stärker ist der Weichzeichnungseffekt.
- Für $\varepsilon = \pi$ und alle $n \neq 0$ gilt $\mathrm{si}(n\,\varepsilon) = \mathrm{si}(n\,\pi) = 0$. Das bedeutet, dass dann alle $c_n$ außer $c_0$ mit $0$ multipliziert werden. Das Ergebnis ist die konstante Funktion: $g_\pi(x) = c_0$ für alle $x$. Die Weichzeichnung ist maximal.

Die einzige Information, die sich bei beliebigem Weichzeichnen nicht ändert, ist das Integral über eine Periode:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \qquad \text{für beliebige } \varepsilon \in [0,\pi]. \tag{9.15}$$

Wie wird die Weichzeichnung für die Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe dargestellt? Da $\mathrm{si}$ eine gerade Funktion ist, gilt $\mathrm{si}(-n\,\varepsilon) = \mathrm{si}(n\,\varepsilon)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert, dass $c_n$ und

[5] Da wir hier $2\pi$-periodische Funktionen betrachten, können wir der „Grundschwingung" formal die Kreisfrequenz $1$ und die Frequenz $\frac{1}{2\pi}$ zuschreiben. Der $(n-1)$-ten Oberschwingung (repräsentiert durch $c_n$ und $c_{-n}$ oder durch $a_n$ und $b_n$) schreiben wir die Kreisfrequenz $n$ und die Frequenz $\frac{n}{2\pi}$ zu.

$c_{-n}$ den gleichen Faktor $\mathrm{si}(n\,\varepsilon)$ bekommen. Mit (9.4) und (9.5) schließen wir daraus, dass die gleiche Weichzeichnungsvorschrift auch für die Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \xrightarrow{\text{weichzeichnen}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{si}(n\,\varepsilon)\,\big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big). \tag{9.16}$$

Sie kann natürlich auch auf die Partialsummen angewandt werden.

Wenden wir diese Vorschrift auf die Fourierreihe (3.3) der Kippschwingung (3.1) an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x) \quad \xrightarrow{\text{weichzeichnen}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\, \mathrm{si}(n\,\varepsilon)\, \sin(n\,x). \tag{9.17}$$

Abbildung 9 zeigt links die Partialsumme der Ordnung $100$ der Kippschwingung und rechts die Partialsumme der Ordnung $100$ der mit $\varepsilon = 0.3$ weichgezeichneten Kippschwingung. Letztere ist von $g_{0.3}$ praktisch nicht zu unterscheiden. Die abrupten Sprünge sind verschwunden und durch stetige (lineare) Übergänge ersetzt. Der linke Graph illustriert übrigens auch, dass ein simples Abbrechen der Reihe (also der Übergang von der Fourierreihe zu einer ihrer Partialsummen) bei weitem keine so gute Weichzeichnung darstellt wie (9.17).

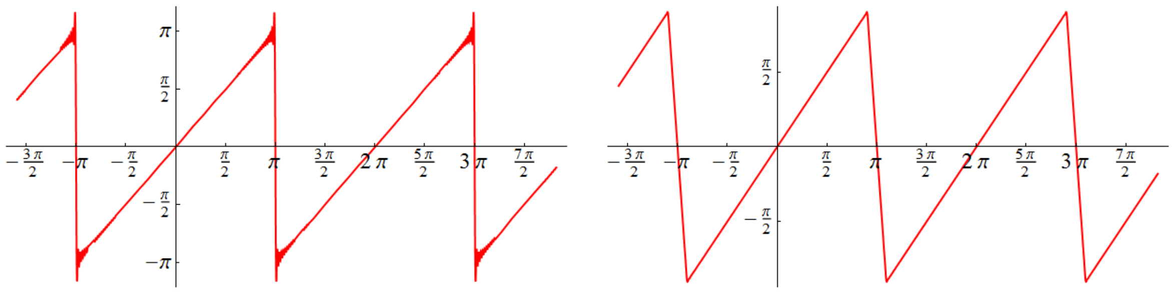



**Abbildung 9:** Links: Partialsumme der Ordnung $100$ der Kippschwingung. Rechts: Partialsumme der Ordnung $100$ der mit $\varepsilon = 0.3$ weichgezeichneten Kippschwingung.

Da sich die Faktoren $\mathrm{si}(n\varepsilon)$ für große $n$ wie $\frac{1}{n}$ verhalten, verbessert sich durch die Weichzeichnung auch das Abfallverhalten der Amplituden. Generell wird durch die Weichzeichnungsvorschrift die $n$-te Amplitude $A_n$ mit $|\mathrm{si}(n\varepsilon)|$ multipliziert. Während die Kippschwingung durch $A_n \sim \frac{1}{n}$ charakterisiert ist, fallen die Amplituden der weichgezeichneten Kippschwingung wie $\frac{1}{n^2}$ ab. Das passt damit zusammen, dass die Weichzeichnung aus einer unstetigen eine stetige Funktion macht. Aus einer zwar stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion (deren Graph Ecken hat) macht sie eine differenzierbare Funktion.

Der Weichzeichner, der auf einer Faltung mit der in (9.8) definierten Funktion $w$ beruht, ist nicht der einzig mögliche. Anstelle von $w$ können auch andere $2\pi$-periodische Funktionen verwendet werden, durchaus auch solche mit noch schönerem Verhalten. Ganz wie gewünscht. Dabei ist lediglich sicherzustellen, dass ihr Integral über eine Periode gleich $1$ ist (was auch für $w$ gilt). In jedem Fall besteht die Wirkung der Weichzeichnung darin, die Fourierkoeffizienten $c_n$ mit $2\pi$ mal den Fourierkoeffizienten der gewählten Weichzeichner-Funktion zu multiplizieren.

Fassen wir zusammen: Der Formalismus der Fourierreihen erlaubt es, eine Mittelung der Form (9.6) bzw. eine Faltung der Form (9.7), die Funktionen in der beschriebenen Weise modifiziert, durch eine Reihe von simplen Multiplikationen auszudrücken.

# 10 Beispiel: Wärmeleitung

Unser letztes Beispiel beleuchtet die Fourierreihen von einem anderen Blickwinkel und ist gleichzeitig ein Ausflug in die Geschichte der Mathematik. Joseph Fourier hat im frühen 19. Jahrhundert das Konzept der Fourierreihe anhand der Beschreibung der Wärmeleitung entwickelt. Wir betrachten nun keine periodischen Funktionen, sondern beschränken uns auf ein einziges Intervall. Es ist jetzt kein Zeitintervall, sondern stellt einen (dünnen) Stab dar, der an jeder Stelle eine bestimmte Temperatur hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es sich um das Intervall $[-\pi, \pi]$ handelt. Der Stab hat also die Länge $2\pi$ (wir ignorieren wieder, dass $2\pi$ keine physikalische Länge ist), die Variable $x$, die die Stellen entlang des Stabs angibt, ist der Bedingung $-\pi \leq x \leq \pi$ unterworfen. Zusätzlich benötigen wir eine Zeitvariable $t$. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die Temperatur, die zur Zeit $t$ an der Stelle $x$ des Stabs herrscht. Hängt sie zu einer bestimmten Anfangszeit von $x$ ab, so wird Wärme von den heißeren zu den kälteren Stellen fließen, d.h. die Temperaturverteilung wird sich mit der Zeit ändern. Wie? Ist der Stab homogen, so erfüllt die Funktion $u$ die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**[6]

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t). \tag{10.1}$$

Dabei bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial t}$ die partielle Zeitableitung nach $t$ (d.h. die Ableitung nach $t$, wenn $x$ als konstant betrachtet wird), und $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ bezeichnet die zweite partielle Ableitung nach $x$ (d.h. die zweite Ableitung nach $x$, wenn $t$ als konstant betrachtet wird). Sind die Enden des Stabs isoliert, sodass keine Wärme durch sie abfließen kann, so müssen zusätzlich die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ an diesen beiden Stellen gleich $0$ sein. Wir wollen uns mit diesen Randbedingungen nicht herumschlagen und treffen eine Vereinfachung, die sie automatisch garantiert: Wir verlangen, dass die Temperatur zur Anfangszeit $t = 0$ symmetrisch auf dem Stab verteilt ist, d.h. dass die Funktion

$$u_0(x) = u(x, 0) \tag{10.2}$$

eine gerade Funktion ist ($u_0(-x) = u_0(x)$) und dass ihre periodische Fortsetzung überall differenzierbar ist. (Dem Graphen einer solchen Funktion bleibt dann nichts anderes übrig, als an den Randstellen $-\pi$ und $\pi$ des Stabs eine wohldefinierte und waagrechte Tangente zu besitzen, wodurch die Randbedingungen automatisch erfüllt sind.)

[6] Wie man auf sie kommt, muss uns hier nicht interessieren. Theoretisch müsste man die rechte Seite noch mit der *Wärmeleitungskonstante* multiplizieren, die vom Material, aus dem der Stab besteht, abhängt. Der Einfachheit halber haben wir sie gleich $1$ gesetzt.

Wie sieht die Lösung der partiellen Differentialgeichung (10.1) aus, wenn als Temperaturverteilung zur Anfangszeit $t = 0$ eine gerade Funktion mit überall differenzierbarer periodischer Fortsetzung vorgegeben ist?

Eine Lösungsmethode für dieses Problem besteht darin, für jeden (festgehaltenen) Zeitpunkt $t$ die Funktion $x \mapsto u(x,t)$ in eine Fourierreihe zu entwickeln. Wir unterscheiden der Einfachheit halber nicht zwischen der Funktion und ihrer Fourierreihe und schreiben

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(t)\cos(n\,x) + b_n(t)\sin(n\,x)\big). \tag{10.3}$$

Beachten Sie, dass die Fourierkoeffizienten jetzt von der Zeit abhängen! Zur Anfangszeit $t = 0$ erhalten wir

$$u_0(x) = u(x,0) = \frac{a_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(0)\cos(n\,x) + b_n(0)\sin(n\,x)\big). \tag{10.4}$$

Da $u_0$ eine gerade Funktion ist, gilt $b_n(0) = 0$ für $n \geq 1$. Die Forderung, dass die periodische Fortsetzung von $u_0$ überall differenzierbar ist, ist sicher dann erfüllt, wenn ihre Fourierkoeffizienten $a_n(0)$ für große $n$ sehr schnell, etwa wie $\frac{1}{n^3}$, abnehmen.

Nun schreiben wir die Differentialgleichung (10.1) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) = 0 \tag{10.5}$$

an, setzen (10.3) ein, bilden die Ableitungen und erhalten

$$\frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big(a_n'(t) + n^2\,a_n(t)\big)\,\cos(n\,x) + \big(b_n'(t) + n^2\,b_n(t)\big)\,\sin(n\,x)\Big) = 0. \tag{10.6}$$

Für jeden Zeitpunkt $t$ stellt das eine Fourierreihe dar, die gleich $0$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten müssen diese ebenfalls alle gleich $0$ sein. Daher muss gelten (für $n \geq 1$)

$$a_0'(t) = 0 \tag{10.7}$$

$$a_n'(t) + n^2\,a_n(t) = 0, \quad \text{also } a_n'(t) = -n^2\,a_n(t) \tag{10.8}$$

$$b_n'(t) + n^2\,b_n(t) = 0, \quad \text{also } b_n'(t) = -n^2\,b_n(t). \tag{10.9}$$

Die erste dieser Beziehungen sagt uns unmittelbar, dass $a_0$ nicht von der Zeit abhängt. Alle anderen Fourierkoeffizienten können wir durch ihre Anfangswerte ausdrücken[7]:

$$a_n(t) = a_n(0)\,e^{-n^2\,t} \tag{10.10}$$

$$b_n(t) = \underbrace{b_n(0)}_{0}\,e^{-n^2\,t} = 0. \tag{10.11}$$

[7] Leiten Sie (10.10) und (10.11) nach $t$ ab und überprüfen Sie die Gültigkeit von (10.8) und (10.9)! Aufgrund der schönen Ableitungseigenschaft der Exponentialfunktion sollte klar sein, dass man (10.10) und (10.11) auch ohne viel Theorie „erraten“ kann.

Dabei haben wir benutzt, dass $b_n(0) = 0$ für alle $n \geq 1$. Das alles setzen wir in (10.3) ein und bekommen alle Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, die aus einer symmetrischen Anfangsverteilung mit differenzierbarer periodischer Fortsetzung hervorgehen, in der Form

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \cos(n\,x)\, e^{-n^2 t}. \tag{10.12}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist sie gleich

$$u_0(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \cos(n\,x). \tag{10.13}$$

Damit sind wir eigentlich fertig und müssen nur mehr interpretieren, was wir erreicht haben: Ist die anfängliche symmetrische Temperaturverteilung $u_0(x)$ gegeben, so entwickeln wir sie in eine Fourierreihe und bekommen (10.13). Daraus bilden wir (10.12) und haben die gesuchte Temperaturverteilung zu jeder späteren Zeit $t$ gefunden – als Fourierreihe. Dass die Funktion $u_0$ gerade ist und dass ihre periodische Fortsetzung überall differenzierbar ist, überträgt sich auf die Funktionen $x \mapsto u(x,t)$ zu allen späteren Zeitpunkten, da auch (10.12) keine Sinus-Anteile besitzt und da die zusätzlichen Faktoren $e^{-n^2 t}$ die höheren „Frequenzen" dämpfen[8] und die Differenzierbarkeit im Vergleich zu $u_0$ höchstens noch verbessern. Damit sind die Randbedingungen, die einen Wärmeabfluss durch die Enden des Stabs verhindern, auch zu späteren Zeiten erfüllt.

Mit wachsendem $t$ werden die Faktoren $e^{-n^2 t}$ in (10.12) immer kleiner. Für $t \to \infty$ strebt (10.12) gegen den ersten Summanden $\frac{a_0}{2}$, d.h. gegen eine konstante Temperaturverteilung. Das entspricht der Erfahrung: Wenn man lange genug wartet, ist die Temperatur auf dem Stab praktisch überall gleich. Alle Zwischenstadien werden von (10.12) für $t > 0$ beschrieben.

Abbildung 10 zeigt als Beispiel die Temperaturverteilung

$$u(x,t) = \frac{5}{2} + 2\cos(x)\, e^{-t} + \cos(2x)\, e^{-4\,t^2} \tag{10.14}$$

von $t = 0$ bis $t = 1$ in Schritten von $0.1$ und zusätzlich den asymptotischen Endzustand, gegen den die Verteilung für $t \to \infty$ strebt, bezeichnet mit $u_\infty(x)$. Man sieht sehr schön, wie die Temperaturunterschiede einander ausgleichen und dass die Randbedingungen (Ableitung $= 0$ an den Randstellen $\pm\pi$) erfüllt sind.

**Nachbemerkung**: Die Bedingung, dass die periodische Fortsetzung von $u_0$ überall differenzierbar ist, verweist auf ein **Problem**, das man bedenken sollte, **wenn Fourierreihen auf ein Intervall beschränkt werden**, weil es um (nicht-periodische) Funktionen geht, die nur in diesem Intervall „leben". Differenziert man eine Fourierreihe gliedweise, so **differenziert man in Wahrheit die periodische Fortsetzung**! Ist diese nicht differenzierbar, so kommt man in Teufels Küche. Man

[8] Den Übergang $u_0(x) \to u(x,t)$, der physikalisch die Zeitentwickung aus einer Anfangsverteilung darstellt, kann man übrigens auch als „Weichzeichner" ansehen, ganz im Sinn des vorigen Beispiels. In dieser Rolle kann er auch auf Fourierreihen angewandt werden, die Sinus-Anteile besitzen. Er dämpft die höheren „Frequenzen" umso stärker, je größer $t$ ist.

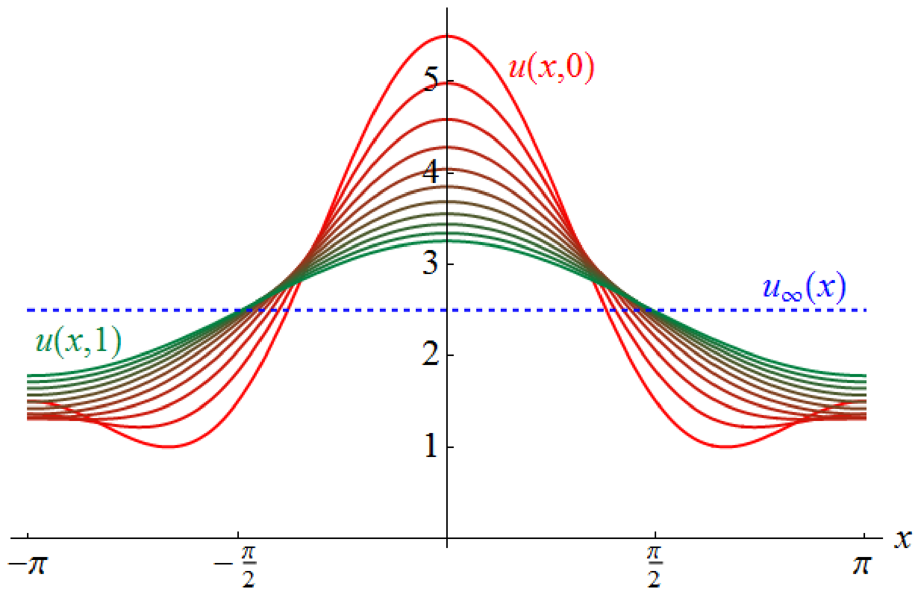



**Abbildung 10:** Für die Temperaturverteilung (10.14) längs eines Stabs, der durch das Intervall $[-\pi, \pi]$ dargestellt wird, sind die Graphen der Funktionen $x \mapsto u(x,t)$ von $t = 0$ bis $t = 1$ in Schritten von $0.1$ und der Graph des Grenzwerts von $u(x,t)$ für $t \to \infty$, bezeichnet mit $u_\infty(x)$, gezeigt.

handelt sich dann Fourierreihen ein, die nicht konvergieren, und zwar auch nicht an Stellen, an denen die Funktion, die von der Reihe dargestellt wird, differenzierbar ist. Bildet man beispielsweise gliedweise die Ableitung der Fourierreihe (3.3) der Kippschwingung (3.1), so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\,(-1)^{n+1}\,\cos(n\,x). \tag{10.15}$$

An allen Stellen, an denen die Kippschwingung differenzierbar ist, also etwa innerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi)$, ist ihre Ableitung gleich $1$. Aber (10.15) konvergiert nicht gegen $1$. Schlimmer noch: Diese Reihe konvergiert nirgends! Nur wenn wir die Kippschwingung als Ganzes betrachten und nicht auf ihre Werte innerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi)$ reduzieren, wird der Sachverhalt klarer: An den Stellen, an denen die Kippschwingung abrupt auf $0$ abfällt, existiert ihre Ableitung nicht. Selbst wenn man mit Gewalt von der „Ableitung“ der Kippschwingung sprechen möchte, muss man zugeben, dass diese an den Unstetigkeitsstellen gleich $-\infty$ ist. Es handelt sich dabei auf jeden Fall *nicht* um eine $2\pi$-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion. Unser wichtigstes Kriterium für die Konvergenz der Fourierreihe ist also auf die (vermeintliche) Ableitung der Kippschwingung nicht anwendbar!

Man kann diese Probleme reparieren, indem man eine andere Mathematik, die Theorie der *verallgemeinerten Funktionen* (*Distributionen*) anwendet. In dieser Theorie ist (10.15) innerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi)$ *in einem gewissen Sinn* gleich $1$. Will man Probleme dieser Art aber ganz vermeiden, so empfiehlt es sich, immer die periodische Fortsetzung der Funktionen, mit denen man zu tun hat, und ihr Verhalten an den Randstellen des betrachteten Intervalls im Auge zu behalten.

# 11 Ergänzung: oft auftretende Integrale

Jede der Formeln (1.2)–(1.4) und (1.19)–(1.21) stellt für die gegebene Funktion $g$ bzw. $f$ nicht nur ein einziges Integral dar, sondern unendlich viele – für jedes $n$ eines. Deren Werte hängen daher in der Regel von $n$ ab. Einige besondere Ausdrücke, die dabei auftreten, sollte man schnell erkennen und gegebenenfalls vereinfachen können. Da sind zunächst die beiden für beliebige ganze Zahlen $n$ geltenden Beziehungen

$$\cos(n\,\pi) = (-1)^n \tag{11.1}$$

$$\sin(n\,\pi) = \quad 0 \tag{11.2}$$

zu nennen. Dabei ist

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{cases} \tag{11.3}$$

und $-(-1)^n$ kann bei Bedarf auch als $(-1)^{n+1}$ geschrieben werden. Weiters tritt oft die Kombination

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.4}$$

auf.

Falls in einem Integranden $e^{j\,n\,x}$ auftritt, aber nur die beiden Integrale, die stattdessen $\cos(n\,x)$ und $\sin(n\,x)$ enthalten, bekannt sind, benutzen Sie die Eulersche Formel

$$e^{j\,n\,x} = \cos(n\,x) + j\,\sin(n\,x). \tag{11.5}$$

Zunächst listen wir einige unbestimmte Integrale auf.

### Unbestimmte Integrale, alle für $q \in \mathbb{R}, q \neq 0$:

In diesen Integralen kann $q$ ($\neq 0$) für eine natürliche oder ganze Zahl $n$ ($\neq 0$) stehen (wenn die zugrunde gelegte Periode $2\pi$ ist) oder für $n\,\omega$, d.h. $\frac{2\pi}{T}\,n$ (wenn die zugrunde gelegte Periode $T$ ist).

$$\int \cos(q\,x)\,dx = \frac{1}{q}\,\sin(q\,x) + C \tag{11.6}$$

$$\int \sin(q\,x)\,dx = -\frac{1}{q}\,\cos(q\,x) + C \tag{11.7}$$

$$\int e^{j\,q\,x}\,dx = -\frac{j}{q}\,e^{j\,q\,x} + C \tag{11.8}$$

$$\int \cos(q\,x)\,x\,dx = \frac{1}{q^2}\,\cos(q\,x) + \frac{x}{q}\,\sin(q\,x) + C \tag{11.9}$$

$$\int \sin(q\,x)\,x\,dx = \frac{1}{q^2}\,\sin(q\,x) - \frac{x}{q}\,\cos(q\,x) + C \tag{11.10}$$

$$\int e^{j\,q\,x}\,x\,dx = \left(\frac{1}{q^2} - \frac{j\,x}{q}\right) e^{j\,q\,x} + C \tag{11.11}$$

$$\int \cos(q\,x)\,x^2\,dx = \frac{2x}{q^2}\,\cos(q\,x) + \left(\frac{x^2}{q} - \frac{2}{q^3}\right)\sin(q\,x) + C \tag{11.12}$$

$$\int \sin(q\,x)\,x^2\,dx = \frac{2x}{q^2}\,\sin(q\,x) + \left(-\frac{x^2}{q} + \frac{2}{q^3}\right)\cos(q\,x) + C \tag{11.13}$$

$$\int e^{j\,q\,x}\,x^2\,dx = \left(-\frac{j\,x^2}{q} + \frac{2x}{q^2} + \frac{2j}{q^3}\right)e^{j\,q\,x} + C \tag{11.14}$$

Nun kommen wir zu einer Liste bestimmter Integrale, die oft auftreten. Sie sind auf Fourierreihen zur Periode $2\pi$ zugeschnitten. Ist die zu entwickelnde Funktion stückweise durch mehrere Terme gegeben, so treten Integrale über Teilintervalle von $[-\pi, \pi]$ auf, am häufigsten Integrale über $[0, \pi]$ und über $[-\pi, 0]$. Manchmal ist die zu entwickelnde Funktion auch innerhalb des Intervalls $[0, 2\pi]$ angegeben. Daher folgen nun vier Listen.

## Bestimmte Integrale über das Intervall $[0, \pi]$, alle für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:

$$\int_0^\pi \cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.15}$$

$$\int_0^\pi \sin(n\,x)\,dx = \frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.16}$$

$$\int_0^\pi e^{j\,n\,x}\,dx = \frac{j}{n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \dfrac{2j}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.17}$$

$$\int_0^\pi \cos(n\,x)\,x\,dx = -\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{2}{n^2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.18}$$

$$\int_0^\pi \sin(n\,x)\,x\,dx = -\frac{\pi}{n}\,(-1)^n = \frac{\pi}{n}\,(-1)^{n+1} \tag{11.19}$$

$$\int_0^\pi e^{j\,n\,x}\,x\,dx = \text{(11.18)} + j\ \text{(11.19)} \tag{11.20}$$

$$\int_0^\pi \cos(n\,x)\,x^2\,dx = \frac{2\pi}{n^2}\,(-1)^n \tag{11.21}$$

$$\int_0^\pi \sin(n\,x)\,x^2\,dx = \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\right)(-1)^n - \frac{2}{n^3} = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \dfrac{\pi^2}{n} - \dfrac{4}{n^3} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.22}$$

$$\int_0^\pi e^{j\,n\,x}\,x^2\,dx = \text{(11.21)} + j\ \text{(11.22)} \tag{11.23}$$

## Bestimmte Integrale über das Intervall $[-\pi, 0]$, alle für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:

Sie können alle Integrale der folgenden Liste ganz leicht durch die Variablensubstitution $x \to -x$ aus der vorigen Liste erhalten. Die Integralgrenzen werden dabei gemäß $0 \to 0$, $\pi \to -\pi$ ersetzt, d.h. es treten Integrale „von $0$ bis $-\pi$“ auf. Nun ist noch zu beachten, dass

$$\int_0^{-\pi} h(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{0} h(x)\,dx \tag{11.24}$$

gilt, d.h. dass eine Vertauschung der Integralgrenzen ein zusätzliches Minuszeichen erzeugt. Hier die Liste:

$$\int_{-\pi}^{0} \cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.25}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(n\,x)\,dx = -\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{2}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.26}$$

$$\int_{-\pi}^{0} e^{j\,n\,x}\,dx = -\frac{j}{n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{2j}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.27}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \cos(n\,x)\,x\,dx = \frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{n^2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.28}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(n\,x)\,x\,dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} \tag{11.29}$$

$$\int_{-\pi}^{0} e^{j\,n\,x}\,x\,dx = \text{(11.28)} + j\ \text{(11.29)} \tag{11.30}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \cos(n\,x)\,x^2\,dx = \frac{2\pi}{n^2}(-1)^n \tag{11.31}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin(n\,x)\,x^2\,dx = \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)(-1)^n + \frac{2}{n^3} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{\pi^2}{n} + \dfrac{4}{n^3} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.32}$$

$$\int_{-\pi}^{0} e^{j\,n\,x}\,x^2\,dx = \text{(11.31)} + j\ \text{(11.32)} \tag{11.33}$$

**Bestimmte Integrale über das Intervall $[-\pi, \pi]$, alle für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.34}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.35}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,n\,x}\,dx = 0 \tag{11.36}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,x\,dx = 0 \tag{11.37}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,x\,dx = -\frac{2\pi}{n}\,(-1)^n = \frac{2\pi}{n}\,(-1)^{n+1} \tag{11.38}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,n\,x}\,x\,dx = -\frac{2\pi}{n}\,j\,(-1)^n = \frac{2\pi}{n}\,j\,(-1)^{n+1} \tag{11.39}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,x^2\,dx = \frac{4\pi}{n^2}\,(-1)^n \tag{11.40}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,x^2\,dx = 0 \tag{11.41}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,n\,x}\,x^2\,dx = \frac{4\pi}{n^2}\,(-1)^n \tag{11.42}$$

**Bestimmte Integrale über das Intervall $[0, 2\pi]$, alle für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:**

$$\int_{0}^{2\pi} \cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.43}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(n\,x)\,dx = 0 \tag{11.44}$$

$$\int_{0}^{2\pi} e^{j\,n\,x}\,dx = 0 \tag{11.45}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos(n\,x)\,x\,dx = 0 \tag{11.46}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(n\,x)\,x\,dx = -\frac{2\pi}{n} \tag{11.47}$$

$$\int_{0}^{2\pi} e^{j\,n\,x}\,x\,dx = -\frac{2\pi}{n}\,j \tag{11.48}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos(n\,x)\,x^2\,dx = \frac{4\pi}{n^2} \tag{11.49}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(n\,x)\,x^2\,dx = -\frac{4\pi^2}{n} \tag{11.50}$$

$$\int_{0}^{2\pi} e^{j\,n\,x}\,x^2\,dx = \text{(11.49)} + j\ \text{(11.50)} \tag{11.51}$$

## Wenn zwischen geradem und ungeradem $n$ unterschieden wird:

In diesen Listen treten bisweilen Ausdrücke auf, bei denen zwischen geradem und ungeradem $n$ unterschieden wird. Ähnliches passiert auch, wenn im Zuge einer Berechnung der Fourierkoeffizienten einer $2\pi$-periodischen Funktion ein Integral über ein Teilintervall der Länge $\frac{\pi}{2}$ zu bilden ist, also etwa über eines der Intervalle $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. In diesen Fällen werden in der Regel im Ergebnis Terme der Form $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ und $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ mit ganzzahligem $n$ auftreten, deren Zahlenwerte durch

$$\cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{wenn } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{11.52}$$

$$\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ (-1)^k & \text{wenn } n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{11.53}$$

gegeben sind.

Um ganz allgemein Summen über Ausdrücke, in denen zwischen geradem und ungeradem $n$ unterschieden wird, in geschlossene Form zu bringen, können Sie benutzen,

- dass die geraden Zahlen $n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ in der Form $n = 2k$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ durchnummeriert werden können,
- dass die geraden Zahlen $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ in der Form $n = 2k$ mit $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ durchnummeriert werden können, und
- dass die ungeraden Zahlen $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ in der Form $n = 2k+1$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ durchnummeriert werden können.

Diesen Trick haben wir verwendet, um die Darstellungen (5.5), (6.4) und (8.5) zu erzielen. Ein anderes Beispiel wäre, falls bei einer Berechnung $a_n = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ für alle $n \geq 1$ herauskommt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) \cos(n\,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4\,k^2} \cos(2\,k\,x), \tag{11.54}$$

wobei die Beziehung (11.52) benutzt wurde.

## Wenn die Periode $\neq 2\pi$ ist:

Wie erwähnt, sind alle in den obigen Listen angegebenen bestimmten Integrale auf Fourierreihen zur Periode $2\pi$ zugeschnitten. Um entsprechende Integrale für eine allgemeine Periode $T$ auf sie zurückzuführen, können Sie eine der Umrechnung (1.12) – (1.14) entsprechende Variablensubstitution durchführen. Ist beispielsweise

$$\int_0^{T/2} \sin\Big(\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega}\,n\,t\Big)\,t^2\,dt \tag{11.55}$$

zu berechnen, so führen Sie die Substitution $t = \frac{x}{\omega}$, $dt = \frac{dx}{\omega}$ durch, rechnen die Integrationsgrenzen gemäß

$$x_{\text{untere Grenze}} = \omega\,t_{\text{untere Grenze}} = \omega \cdot 0 = 0 \tag{11.56}$$

$$x_{\text{obere Grenze}} = \omega\,t_{\text{obere Grenze}} = \omega\,\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{T}{2} = \pi \tag{11.57}$$

um und formen (11.55) zu

$$\int_0^\pi \sin(n\,x)\,\left(\frac{x}{\omega}\right)^2\,\frac{dx}{\omega} = \frac{1}{\omega^3}\int_0^\pi \sin(n\,x)\,x^2\,dx \tag{11.58}$$

um. Nun können Sie nachsehen, ob Sie dieses Integral in der Liste finden! Es ist natürlich gleich $\frac{1}{\omega^3}$ mal (11.22).

Falls Ihnen eine Aufgabe gestellt ist, in der die Bezeichnungen für Integrationsvariable und Perioden von den hier gewählten abweichen, oder falls kein eigenes Symbol für die Kreisfrequenz vorgesehen ist, so bedenken Sie, dass es auf diese Namen nicht ankommt und dass anstelle der Kreisfrequenz genausogut

$$\frac{2\pi}{\text{Periode}} \tag{11.59}$$

geschrieben werden kann. Tritt beispielsweise das Integral (11.55) in der Form

$$\int_0^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}\,n\,x\right)\,x^2\,dx \tag{11.60}$$

auf, so können Sie $x$ in $t$ umbenennen und so vorgehen wie zuvor (wobei es nun $L$ heißt anstelle von $T$), aber Sie können auch irgendeinen Namen für die neue Variable erfinden, also etwa das Integral (11.60) mit Hilfe der Substitution $x = \frac{L}{2\pi}\,\xi$ zu

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^\pi \sin(n\,\xi)\,\xi^2\,d\xi \tag{11.61}$$

umformen und mit Hilfe der obigen Liste erkennen, dass es gleich $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$ mal (11.22) ist.

## Integrale von geraden und ungeraden Funktionen:

Hier zwei letzte Tipps: Ist $h$ eine gerade Funktion, und ist das Integral von $h$ über ein symmetrisches Intervall $[-q, q]$ zu berechnen, so können Sie es gemäß

$$\int_{-q}^{q} h(x)\,dx = 2\int_0^q h(x)\,dx \tag{11.62}$$

zu einem Integral über das Intervall $[0, q]$ umformen[9], da die Beiträge von der linken und der rechten Hälfte des ursprünglichen Intervalls $[-q, q]$ gleich sind. Ist $h$ eine ungerade Funktion, so gilt

$$\int_{-q}^{q} h(x)\,dx = 0, \tag{11.63}$$

da die Beiträge von den beiden Intervallhälften einander aufheben.

[9] Das wurde bereits im Skriptum *Fourierreihen: Einführung* besprochen.

# 12 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten. In den Lösungen der Aufgaben, in denen auch Skizzen und Plots zu erstellen sind, sind meist nur die Formelausdrücke angegeben. Die Erstellung der zugehörigen Skizzen und Plots ist dann Ihnen überlassen. Machen Sie sich mit einem Computerwerkzeug bekannt (wie *GeoGebra*), das das für Sie übernimmt!

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \pi - |x| & \text{wenn } -\pi < x \le \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.1}$$

  und entwickeln Sie sie in eine Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Form)! (Wenn Sie es geschickt machen und Ergebnisse benutzen, die in diesem Skriptum erzielt wurden, so müssen Sie dafür überhaupt nichts rechnen!) Für welche $x$ konvergiert die Fourierreihe gegen $h(x)$, für welche $x$ nicht? Erstellen Sie Plots einiger Partialsummen!

  Lösung:

  Die Funktion $h$ geht aus der Dreiecksschwingung (5.1) durch $h(x) = \pi - g(x)$ hervor. Daher ist die Fourierreihe von $h$ gleich $\pi$ minus der Fourierreihe (5.5) von $g$:

$$\tilde{h}(x) = \pi - \tilde{g}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\big((2k+1)\,x\big).$$

  Die Fourierreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $h(x)$, da $h$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

- Nutzen Sie die in diesem Skriptum für die $2\pi$-periodische Dreiecksschwingung (5.1) erzielten Resultate, um die $T$-periodische Dreiecksschwingung mit Werten zwischen $0$ und $K > 0$

$$f(t) = \begin{cases} 2\,K\,\dfrac{|t|}{T} & \text{wenn } -\dfrac{T}{2} < t \le \dfrac{T}{2} \\[2ex] \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.2}$$

  in eine Fourierreihe zu entwickeln! (Berechnen Sie *nicht* die Fourierkoeffizienten neu, sondern gehen Sie von (5.1) und (5.4) bzw. (5.5) aus!)

  Lösung:

  Die Funktion $f$ geht aus der Dreiecksschwingung (5.1) durch $f(t) = \dfrac{K}{\pi}\, g\!\left(\dfrac{2\pi}{T}\, t\right)$ hervor. Daher ist ihre Fourierreihe gegeben durch

$$\tilde{f}(t) = \frac{K}{2} - \frac{4K}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\,(2k+1)\,t\right).$$

- Entwicken Sie die Funktion

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - |t| & \text{wenn } -\dfrac{1}{2} \leq t < \dfrac{1}{2} \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.3}$$

in eine Fourierreihe (Sinus-Cosinus-Form), (a) indem Sie die Fourierreihe von (12.1) von Periode $2\pi$ auf Periode $1$ umrechnen und mit einer geeigneten Konstante multiplizieren, (b) indem Sie die Fourierkoeffizienten mit Hilfe der Beziehungen (1.18)−(1.20) neu berechnen!

Lösung:

$$\tilde{p}(t) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(2\pi\,(2k+1)\,t\right).$$

- Abbildung 11 zeigt den Graphen einer $2\pi$-periodischen Funktion $v$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.

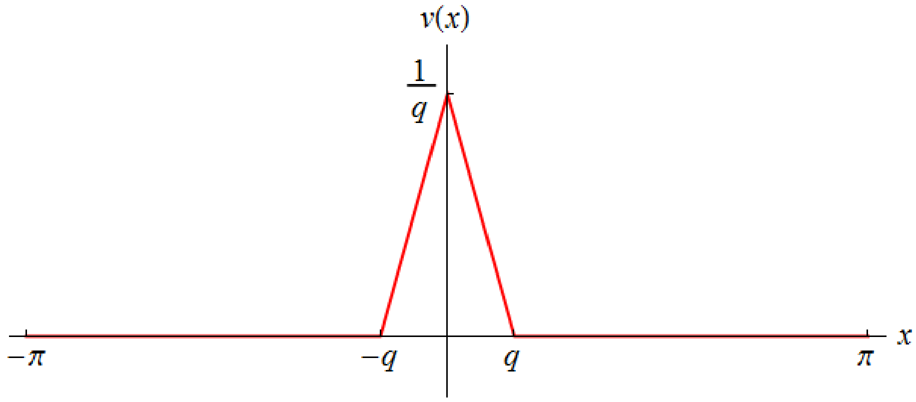



**Abbildung 11**

Dabei gelte $0 < q < \pi$. Entwickeln Sie $v$ in die komplexe Form der Fourierreihe! Zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx = 1$ gilt!

Lösung:

Die Fourierreihe ist gegeben durch $\tilde{v}(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,x}$ mit

$c_0 = \dfrac{1}{2\pi}$ und $c_n = \dfrac{1-\cos(n\,q)}{\pi\,q\,n^2} = \dfrac{2\,\sin^2(n\,q/2)}{\pi\,q\,n^2}$ für $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Das angegebene Integral ist der Inhalt einer Dreiecksfläche:
$\frac{1}{2} \cdot$ Grundlinie $\cdot$ Höhe $= 1$.

Sie können es aber auch so ausrechnen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx = \int_{-q}^{q} \frac{1}{q}\left(1 - \frac{|x|}{q}\right) dx = \frac{2}{q}\int_{0}^{q} \left(1 - \frac{x}{q}\right) dx = 1.$$

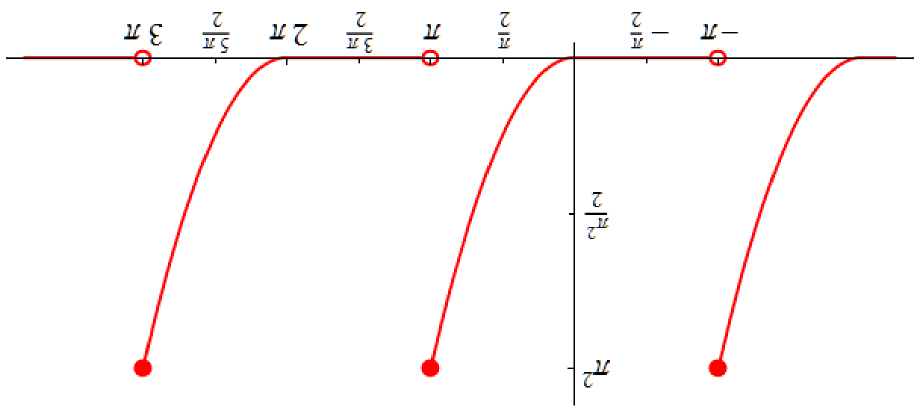
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{wenn } 0 \leq x \leq \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.4}$$

und entwickeln Sie sie in eine Fourierreihe! Nennen Sie die Unstetigkeitsstellen und geben Sie an, wogegen die Fourierreihe an diesen Stellen konvergiert! Erstellen Sie Plots einiger Partialsummen!

Lösung:

Hier der Graph der Funktion $g$:



Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten werden die Integrale (11.21) und (11.22) benötigt.
Die Fourierreihe ist gegeben durch

$$\widetilde{g}(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2\,(-1)^n}{n^2} \cos(n\,x) - \left( \frac{(-1)^n\,\pi}{n} + \frac{2\,(1-(-1)^n)}{n^3 \pi} \right) \sin(n\,x) \right).$$

Die Unstetigkeitsstellen sind die ungeraden Vielfachen von $\pi$ (also $\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$).
An ihnen konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{\pi^2}{2}$.

- Ermitteln Sie das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum der Funktion (12.3) und stellen Sie sie grafisch dar!

Lösung:

$A_0 = \frac{1}{2}$, $A_n = 0$ für alle geraden $n \geq 2$, $A_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}$ für alle ungeraden $n \geq 1$.
$\delta_n = \frac{\pi}{2}$ für alle ungeraden $n \geq 1$. Alle anderen $\delta_n$ sind unbestimmt.

- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{wenn } -\pi \le x < \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.5}$$

und

$$h(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{wenn } -\pi \le x < \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst} \end{cases} \tag{12.6}$$

und entwickeln Sie sie in ihre Fourierreihen in der komplexen Form! Um die nötigen Integrale zu berechnen, benutzen Sie die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gültigen Darstellungen

$$\sin(\varphi) = -\frac{j}{2}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \tag{12.7}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) \tag{12.8}$$

und die Formel (11.8)!

Lösung:

$$\widetilde{g}(x) = \frac{4j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\,(-1)^n}{4n^2-1}\, e^{j\,n\,x}.$$

$$\widetilde{h}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\, e^{j\,n\,x}.$$

- Zeigen Sie, dass die Faltung symmetrisch ist, d.h. dass für $2\pi$-periodische Funktionen $g$ und $h$ stets $g \star h = h \star g$ gilt!

Lösung:

Mit der Variablentransformation $\xi = x - \eta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(g\star h)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,h(x-\xi)\,d\xi = \int_{x+\pi}^{x-\pi} g(x-\eta)\,h(\eta)\,(-d\eta) = \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} g(x-\eta)\,h(\eta)\,d\eta = \int_{x-\pi}^{x+\pi} h(\eta)\,g(x-\eta)\,d\eta = \\ &\overset{\text{Periodizität}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} h(\eta)\,g(x-\eta)\,d\eta = (h\star g)(x).\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass die Faltung zweier $2\pi$-periodischer Funktionen wieder $2\pi$-periodisch ist!

Lösung:

$$(g\star h)(x+2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\underbrace{h(x+2\pi-\xi)}_{h(x-\xi)}\,d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,h(x-\xi)\,d\xi = (g\star h)(x).$$

- Ermitteln Sie die Fourierreihe der Faltung der Funktion (12.6) mit sich selbst!

  Lösung:

  Es müssen nur die Fourierkoeffizienten $c_n$ der Fourierreihe von $h$ quadriert und alles mit $2\pi$ multipliziert werden:

  $$\underset{\sim}{(h*h)}(x) = 2\pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\right)^2 e^{j\,n\,x} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}\, e^{j\,n\,x}.$$

- Benutzen Sie die in Abbildung 11 dargestellte (und in einer früheren Übungsaufgabe in eine Fourierreihe entwickelte) Funktion $v$ als Weichzeichner und wenden Sie sie auf die Rechtecksschwingung (6.1) an! Wie wirkt dieser Weichzeichner auf die Fourierkoeffizienten $b_n$ der Rechtecksschwingung? Wählen Sie einige Werte für $q$ und sehen Sie sich die Plots einiger Partialsummen an! Wie schätzen Sie die Güte dieses Weichzeichners im Vergleich zu (9.8) ein?

  Lösung:

  Alle Fourierkoeffizienten $b_n$ der Rechtecksschwingung bekommen einen Faktor $\dfrac{2\,(1-\cos(n\,q))}{q^2 n^2}$.
  Es fällt auf, dass dieser Weichzeichner die Unstetigkeitsstellen noch sanfter ausglättet als (9.8). Die weichgezeichnete Funktion ist nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar!

---

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2018 im Rahmen der Kooperation „Skripten für technische Studiengänge“ (http://www.mathe-online.at/projekte/KooperationFHTWSkripten.html) von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Für Korrekturen danke ich Harald Stockinger.
Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[Kleinere Korrekturen werden laufend vorgenommen. Letzte Änderung: 12.7.2023.]