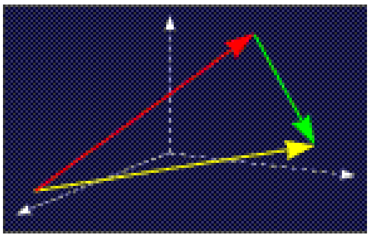
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden die Polardarstellung komplexer Zahlen, die geometrische Deutung der komplexen Multiplikation in der Zahlenebene und die komplexe Exponentialfunktion behandelt. Mit der Beschreibung von Kreisbewegungen und Schwingungen durch komplexe Zahlen rücken einige wichtige Anwendungen der komplexen Zahlen ins Gesichtsfeld.

1 Komplexe Multiplikation, Division, komplex Konjugieren und Absolutbetrag

Im vorangegangenen Skriptum *Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene* wurden die komplexen Zahlen, die Grundrechnungsarten für komplexe Zahlen und das Konzept der komplexen Zahlenebene eingeführt. Die Addition komplexer Zahlen wurde als Regel zum „Aneinanderhängen von Pfeilen" geometrisch gedeutet, die Subtraktion mit Hilfe der „Spitze-minus-Schaft-Regel". Im vorliegenden Skriptum wollen wir untersuchen, wie die komplexe *Multiplikation* geometrisch gedeutet werden kann, und wir werden auf die komplexe Exponentialfunktion stoßen, ein wunderbares Werkzeug, das in Anwendungen eine wichtige Rolle spielt. Als Vorbereitung sehen wir uns zunächst an, wie die komplexe Multiplikation und die Division, die ja auf die Multiplikation zurückgeführt werden kann, mit dem komplex Konjugieren und mit dem Absolutbetrag komplexer Zahlen zusammenspielen.

Kurz zur Wiederholung: Die Angabe einer komplexen Zahl z in der Form $z = x + j\,y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ wird ihre *Komponentendarstellung* genannt[1]. Die reelle Zahl x, auch geschrieben als $\mathrm{Re}(z)$, ist ihr *Realteil*, die reelle Zahl y, auch geschrieben als $\mathrm{Im}(z)$, ist ihr *Imaginärteil*[2].

[1] Der Zusatz „mit $x, y \in \mathbb{R}$" kann entfallen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass mit x und y reelle Zahlen gemeint sind.

[2] Wichtig: Real- und Imaginärteil sind *beide* reell. Verwechseln Sie den Ausdruck „Imaginärteil" bitte nicht mit dem Ausdruck „imaginäre Zahl", der für komplexe Zahlen verwendet wird, deren Realteil gleich 0 ist!

Sind $z_1 = x_1 + j\,y_1$ und $z_2 = x_2 + j\,y_2$ komplexe Zahlen ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sind ihre Realteile, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sind ihre Imaginärteile), so berechnen wir ihr Produkt $z_1 z_2$, indem wir den Ausdruck $(x_1{+}j\,y_1)\,(x_2{+}j\,y_2)$ ausmultiplizieren und $j^2 = -1$ setzen. Das führt auf die allgemeine Formel

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j\,(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{1.1}$$

Auch Divisionen mit komplexen Zahlen (außer der Division durch 0) sind problemlos möglich – die wichtigsten Regeln dafür holen wir in (1.6) und (1.7) gleich nach. Für jede komplexe Zahl $z = x + j\,y$ definieren wir ihre *komplex Konjugierte*

$$\overline{z} = x - j\,y \tag{1.2}$$

(in der geometrischen Sichtweise entspricht der Übergang von z zu $\overline{z}$ einer Spiegelung an der reellen Achse) und ihren *(Absolut-)Betrag*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

(der in der geometrischen Sichtweise als Abstand vom Ursprung zum Punkt (x, y) bzw. als Länge des Pfeils, der z repräsentiert, verstanden werden kann). Weiters wissen wir bereits, dass stets

$$|\overline{z}| = |z| \tag{1.4}$$

und

$$|z|^2 = \overline{z}\,z \tag{1.5}$$

gilt. Daraus erhalten wir nach Division beider Seiten durch $z\,|z|^2$ mit

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{1.6}$$

eine bequeme Formel für die Berechnung des Kehrwerts einer (von 0 verschiedenen) komplexen Zahl und mit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} \tag{1.7}$$

eine kompakte Regel für das Dividieren komplexer Zahlen. Beachten Sie, dass der Nenner $|z_2|^2$ stets reell und, sofern $z_2 \neq 0$, ebenfalls $\neq 0$ ist.

Im Folgenden benötigen wir zwei weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen, die noch nicht besprochen wurden.

Die **erste Eigenschaft** betrifft das komplex Konjugieren und lautet: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \ \overline{z_2}\,. \tag{1.8}$$

In Worten: **Die komplex Konjugierte eines Produkts ist das Produkt der komplex Konjugierten**. Intuitiv sollte uns das klar sein, denn das komplex Konjugieren besteht ja lediglich darin, j durch $-j$ zu ersetzen. Ob man zwei komplexe Zahlen multipliziert und danach diese Ersetzung macht oder zuerst diese Ersetzung in jeder der beiden Zahlen macht und dann die Ergebnisse miteinander multipliziert, spielt keine Rolle – es kommt in beiden

Fällen dasselbe heraus. Das gilt auch für den Anteil, der vom Produkt der beiden j's herrührt: Im einen Fall (zuerst Multiplikation, dann Ersetzung $j \to -j$) bekommen wir ein j^2, das gleich -1 ist. Dem entspricht im anderen Fall (zuerst Ersetzung $j \to -j$, dann Multiplikation) ein Anteil $(-j)^2$, der ebenfalls gleich -1 ist. Es ist auch nicht schwer, (1.8) mit Hilfe von (1.1) und (1.2) direkt nachzurechnen.

Eine analoge Regel betrifft die Division komplexer Zahlen: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$ gilt

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \tag{1.9}$$

Ob man zwei komplexe Zahlen dividiert und danach die Ersetzung $j \to -j$ macht oder zuerst diese Ersetzung in jeder der beiden Zahlen macht und dann die Ergebnisse dividiert, spielt keine Rolle – es kommt in beiden Fällen dasselbe heraus. Auch diese Regel ist nicht schwer zu beweisen.

> **Beispiel**: Um die komplex Konjugierte von $z = \dfrac{2-3j}{3+4j}$ zu berechnen, muss man einfach in Zähler und Nenner j durch $-j$ ersetzen:
>
> $$\overline{z} = \overline{\left(\frac{2-3j}{3+4j}\right)} = \frac{2+3j}{3-4j}\,. \tag{1.10}$$

Die **zweite Eigenschaft** betrifft den Absolutbetrag und lautet: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|. \tag{1.11}$$

In Worten: **Der Absolutbetrag eines Produkts ist das Produkt der Absolutbeträge**. Mit (1.5) und (1.8) fällt der Beweis leicht:

$$|z_1 z_2|^2 \stackrel{(1.5)}{=} \overline{z_1 z_2}\, z_1 z_2 \stackrel{(1.8)}{=} \overline{z_1}\;\overline{z_2}\; z_1 z_2 = \overline{z_1}\, z_1\; \overline{z_2}\, z_2 \stackrel{(1.5)}{=} |z_1|^2\, |z_2|^2, \tag{1.12}$$

woraus durch Ziehen der Wurzel (im reellen Sinn) sofort (1.11) folgt. Ein etwas weniger eleganter Beweis dieses Sachverhalts besteht darin, (1.11) mit Hilfe von (1.1) und (1.3) direkt nachzurechnen.

Eine analoge Regel betrifft die Division komplexer Zahlen: Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{1.13}$$

Die Regeln (1.11) und (1.13) sind in Anwendungen, in denen mit komplexen Zahlen gerechnet werden muss, oft nützlich.

> **Beispiel**: Um den Betrag der komplexen Zahl $z = \dfrac{2-3j}{3+4j}$ zu berechnen, muss man nicht zuerst z in Komponentendarstellung bringen, sondern kann einfach so vorgehen:
>
> $$|z| = \left|\frac{2-3j}{3+4j}\right| \stackrel{(1.13)}{=} \frac{|2-3j|}{|3+4j|} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{13}}{5}\,. \tag{1.14}$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun gut ausgerüstet, zusätzlich zur Komponentendarstellung eine weitere Darstellung komplexer Zahlen kennenzulernen, die einen tieferen Blick in das Wesen dieser neuen Rechenobjekte erlaubt.

2 Polarkoordinaten

Wir gehen davon aus, dass eine komplexe Zahl z als Punkt in der (komplexen) Ebene (den wir ab jetzt ebenfalls mit z bezeichnen) aufgefasst werden kann, oder auch als Pfeil („Zeiger“) vom Koordinatenursprung (der der komplexen Zahl 0 entspricht) zum betreffenden Punkt. Wir bezeichnen den Pfeil ebenfalls mit z, machen also zwischen der komplexen Zahl, dem entsprechenden Punkt der Ebene und dem zugehörigen Pfeil keinen großen Unterschied.

Um nun eine konkrete komplexe Zahl z zu charakterisieren, können ihre kartesischen (d.h. auf die beiden Achsen bezogenen) Koordinaten angegeben werden. Das ist die uns bereits bekannte Komponentendarstellung komplexer Zahlen: $z = x + j\,y$ entspricht dem Punkt mit (kartesischen) Koordinaten x (Realteil von z) und y (Imaginärteil von z).

Eine *andere* Charakterisierung besteht darin, für jede komplexe Zahl z

- den Abstand r des Punktes z zum Ursprung (= die Länge des zugehörigen Pfeils)
- und den im Gegenuhrzeigersinn gemessenen Winkel φ, den der zugehörige Pfeil mit der positiven reellen Achse einschließt,

anzugeben, wie in Abbildung 1 illustriert. Die beiden (reellen) Zahlen r (die **Radialkoordinate**)

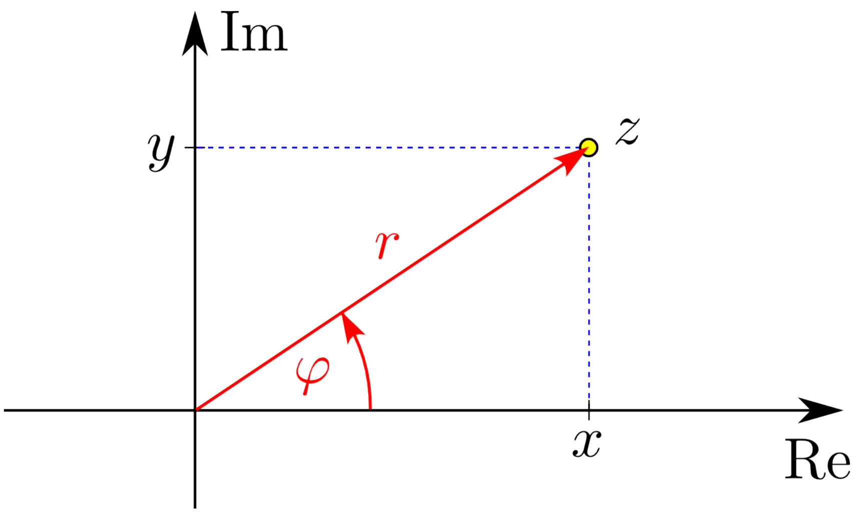


Abbildung 1: Polarkoordinaten r und φ einer komplexen Zahl (bzw. eines Punktes) z: r ist der Abstand von z zum Ursprung (= die Länge des zugehörigen Pfeils) und φ der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel, den der zugehörige Pfeil mit der positiven reellen Achse einschließt.

und φ (der **Polarwinkel**) werden als die **Polarkoordinaten** der komplexen Zahl (bzw. des Punktes) z bezeichnet. Dabei sind drei Dinge wichtig:

- Der Abstand r von z zum Ursprung (= die Länge des zugehörigen Pfeils) ist gleich dem **Betrag** von z. Es gilt also stets:
$$r = |z|. \tag{2.1}$$
Im Spezialfall $z = 0$ ist der Abstand von z zum Ursprung gleich 0, d.h. es gilt dann $r = 0$. (Der „Pfeil" ist in diesem Fall auf Länge 0 geschrumpft.) Für alle anderen komplexen Zahlen gilt $r > 0$.

- Der Polarwinkel φ wird auch das **Argument** der komplexen Zahl z genannt, geschrieben $\arg(z)$, und meist im Bogenmaß angegeben. Er kann auf den Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ eingeschränkt werden. Die Punkte mit $\varphi = 0$ liegen dann auf der positiven reellen Achse, die Punkte mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ liegen auf der positiven imaginären Achse, die Punkte mit $\varphi = \pi$ liegen auf der negativen reellen Achse, und die Punkte mit $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ liegen auf der negativen imaginären Achse. Manchmal ist es bequem, auch Werte von φ, die kleiner als 0 oder größer-gleich 2π sind, zuzulassen. Für diese Fälle vereinbaren wir, dass φ und $\varphi + 2\pi$ stets die gleiche geometrische Bedeutung haben[3]. Damit bezeichnet beispielsweise ein Polarwinkel von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ das Gleiche wie ein Polarwinkel von $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Für manche Zwecke ist es sinnvoll, den Polarwinkel auf den Bereich $-\pi < \varphi \leq \pi$ einzuschränken. Wie auch immer der Bereich für den Polarwinkel festgelegt wird – zunehmendes φ entspricht stets einer Drehung des zugehörigen Pfeils (Zeigers) im Gegenuhrzeigersinn.

- Ist $z = 0$, so ist, wie bereits erwähnt, $r = 0$. In diesem Fall bestimmt z keinen „Pfeil" im üblichen Sinn, und daher ist der Polarwinkel völlig unbestimmt. Ist hingegen $z \neq 0$ (und folglich $r > 0$), so ist der Polarwinkel φ (bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π) eindeutig bestimmt.

Damit stehen uns gleichzeitig *zwei* Systeme zur Charakterisierung komplexer Zahlen zur Verfügung: Einerseits die Angabe von x und y, d.h. von Real- und Imaginärteil, und andererseits die Angabe der Polarkoordinaten r und φ. Bis auf eine kleine Ausnahme steckt in der Angabe der beiden reellen Zahlen x und y die gleiche Information wie in der Angabe der beiden reellen Zahlen r und φ (wobei $r \geq 0$ sein muss und wir bedenken, dass φ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist). Die kleine Ausnahme betrifft nur den Fall, dass $r = 0$ ist. In diesem Fall ist $z = 0$, daher $x = y = 0$, und φ ist unbestimmt[4]. Vom Nullpunkt abgesehen, können wir die Gleichwertigkeit der beiden Charakterisierungen so anschreiben:

$$(x, y) \qquad \longleftrightarrow \qquad (r, \varphi)\,. \tag{2.2}$$

Für Anwendungen ist es entscheidend, diese Darstellungsformen ineinander *umrechnen* zu können.

[3] Der Grund dafür sollte auf der Hand liegen: Wird ein Polarwinkel um 2π (entsprechend $360°$ im Gradmaß) erhöht, aber r gleich gelassen, so entspricht das einer *vollen Drehung* des zugehörigen Pfeils (Zeigers) im Gegenuhrzeigersinn. Der ursprüngliche und der (um 2π) gedrehte Pfeil sind identisch. Damit haben etwa auch $\varphi + 4\pi$ und $\varphi - 2\pi$ die gleiche geometrische Bedeutung wie φ. Knapp ausgedrückt: Zwei Polarwinkel werden miteinander *identifiziert*, wenn ihre Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, d.h. „wenn sie sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden".

[4] Man nennt das eine „Koordinatensingularität". Auf das gleiche Phänomen stoßen Sie, wenn Sie versuchen, dem Nordpol oder dem Südpol der Erde eine geographische Länge zuzuordnen.

Umrechnung von Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten: Den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten für eine komplexe Zahl, deren beide kartesische Koordinaten positiv sind, entnehmen wir der Abbildung 2 (oben links):

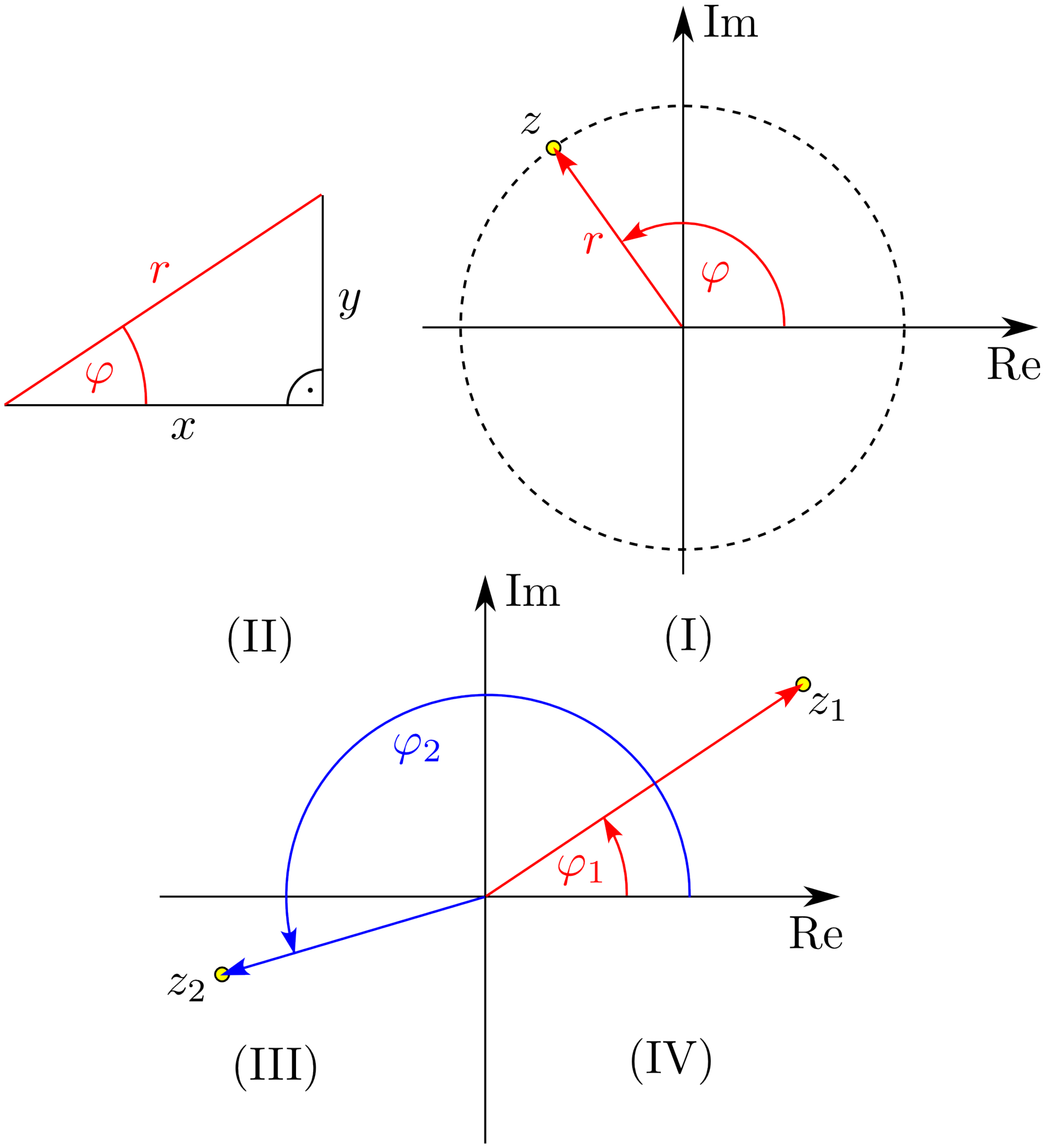


Abbildung 2: Oben links: Berechnung der kartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten, wenn x und y beide positiv sind. Das Ergebnis sind die Beziehungen (2.3) und (2.4).
Oben rechts: Die Beziehungen (2.3) und (2.4) gelten ganz allgemein.
Unten: Bei der Berechnung des Polarwinkels aus den kartesischen Koordinaten muss man achtgeben, in welchem Quadranten die betreffende komplexe Zahl liegt, siehe dazu (2.8) und (2.9). Es sind zwei Beispiele z_1 und z_2 dargestellt. Die vier Quadranten sind mit (I), (II), (III) und (IV) gekennzeichnet.

x und y sind die Kathetenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks, r ist die Länge seiner Hypotenuse. Um einen Zusammenhang mit dem Winkel φ herzustellen, benötigen wir die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus[5]. Der Cosinus von φ („Ankathete durch Hypotenuse") ist gleich $\frac{x}{r}$. Der Sinus von φ („Gegenkathete durch Hypotenuse") ist gleich $\frac{y}{r}$. Damit erhalten wir die Umrechnungsformeln

$$x = r\,\cos(\varphi) \tag{2.3}$$
$$y = r\,\sin(\varphi). \tag{2.4}$$

Tatsächlich gelten sie nicht nur, wenn die kartesischen Koordinaten x und y positiv sind, sondern ganz allgemein, d.h. für *beliebige* Punkte in der Ebene und damit für *beliebige* komplexe Zahlen. In Abbildung 2 (oben rechts) ist eine komplexe Zahl z dargestellt, deren Polarwinkel φ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt. Auch in diesem Fall gelten die Beziehungen (2.3) und (2.4). Es ist dann $\cos(\varphi) < 0$ und $\sin(\varphi) > 0$, in Übereinstimmung damit, dass $x < 0$ und $y > 0$ ist[6]. Der Radius des strichlierten Kreises ist r, sein Mittelpunkt ist der Ursprung. Auf ihm liegen alle komplexen Zahlen mit Betrag r. Ganz allgemein können wir also mit (2.3) und (2.4) die kartesischen Koordinaten x und y einer komplexen Zahl ausrechnen, wenn ihre Polarkoordinaten r und φ bekannt sind[7].

Aus (2.3) – (2.4) folgt unmittelbar, dass wir eine komplexe Zahl $z = x + j\,y$ auch in der Form

$$z = r\,\big(\cos(\varphi) + j\,\sin(\varphi)\big) \tag{2.5}$$

schreiben können, wobei r und φ ihre Polarkoordinaten sind. Das ist bereits eine Version der sogenannten *Polardarstellung* (sie wird manchmal **trigonometrische Polardarstellung** genannt), aber wir werden im nächsten Abschnitt noch eine viel schönere kennenlernen. Ein wichtiger Aspekt der Polardarstellung geht aber bereits aus Formel (2.5) hervor: In ihr ist die

- Betragsinformation über z (die Information über die Radialkoordinate r, d.h. über $|z|$)

fein säuberlich von der

- Winkelinformation (der Information über den Polarwinkel φ, d.h. über $\arg(z)$)

getrennt.

[5] Siehe dazu das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.

[6] Im Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen* wird erklärt, wie die Winkelfunktionen für *beliebige* Winkel, also auch für Winkel, die kleiner als 0 oder größer als $\frac{\pi}{2}$ sind, definiert werden. Dort wurde festgelegt, dass dem (im Gegenuhrzeigersinn von der x-Achse aus gemessenen) Winkel φ stets der Punkt $P = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ am Einheitskreis entspricht, was genau die Aussage von (2.3) und (2.4) für $r = 1$ ist. Für ein beliebiges (positives) r ergibt sich der Punkt $(r\,\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi))$, in Übereinstimmung mit (2.3) und (2.4). Ein Beispiel dafür ist der Punkt z in Abbildung 2 (oben rechts).

[7] Dass der Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt ist, stört dabei nicht, da Sinus und Cosinus periodische Funktionen mit Periode 2π sind: Wird φ um 2π erhöht oder erniedrigt, so ergeben sich die gleichen Werte für x und y. Dass der Polarwinkel im Fall $r = 0$ nicht definiert ist, stört auch nicht, denn dann ergibt sich aus (2.3) und (2.4) ohnehin $x = y = 0$.

Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten: Manchmal sind die kartesischen Koordinaten x und y (d.h. Real- und Imaginärteil) einer komplexen Zahl z gegeben, also $z = x + j\,y$ (wobei wir voraussetzen, dass $z \neq 0$ ist), und man möchte ihre Polarkoordinaten wissen. Wie dann die Radialkoordinate r ermittelt wird, folgt sofort aus (2.1) und (1.3):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2.6}$$

Bei der Ermittlung des Polarwinkels φ müssen wir ein bisschen aufpassen. Aus (2.3) und (2.4) folgt durch Division (sofern $x \neq 0$ ist)

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi). \tag{2.7}$$

Das könnte zum (falschen) Schluss verleiten, φ wäre der Arcus Tangens (atan oder $\tan^{-1}$) des Quotienten $\frac{y}{x}$. Dass das nicht immer stimmen kann, ergibt sich, indem wir zusätzlich zu $z = x + j\,y$ auch $-z = -x - j\,y$ betrachten. Der Quotient „Imaginärteil durch Realteil" ist für beide gleich, denn $\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$, aber ihre Polarwinkel entsprechen entgegengesetzten Orientierungen und unterscheiden sich daher um π. Folglich kann φ nicht alleine von $\frac{y}{x}$ abhängen. Der tiefere mathematische Grund für dieses Problem liegt darin, dass es im Invervall $[0, 2\pi)$ *zwei* Zahlen mit gegebenem Tangens gibt, die unterschiedlichen Winkeln entsprechen, und die wir nicht miteinander identifizieren dürfen. Die Funktion Arcus Tangens liefert nur *einen* dieser beiden Winkel[8]. Die Lösung des Problems besteht darin, zusätzlich zu berücksichtigen, in welchem **Quadranten** z liegt.

> Die vier Quadranten der komplexen Ebene sind in Abbildung 2 (unten) mit (I), (II), (III) und (IV) gekennzeichnet. In welchem Quadranten eine gegebene komplexe Zahl mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ liegt, bestimmt sich aus den Vorzeichen ihrer kartesischen Koordinaten.

Wir geben zwei Formeln für den Polarwinkel an, die stets gelten, wenn x und y beide $\neq 0$ sind, ohne uns weiter in die Problematik zu vertiefen:

- Die erste Formel lautet

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{atan}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{wenn } x > 0 \\ \mathrm{atan}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

  Sie liefert immer einen Polarwinkel im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. Jeder Polarwinkel, der sich von diesem um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheidet, ist natürlich ebenso zulässig.

- Die zweite Formel setzt voraus, dass man bereits mit Hilfe von (2.6) die Radialkoordinate r berechnet hat, und lautet

$$\varphi = \mathrm{sign}(y)\,\mathrm{acos}\left(\frac{x}{r}\right), \tag{2.9}$$

[8] Im Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen* werden die inversen Winkelfunktionen (**Arcusfunktionen**) ausführlich diskutiert.

wobei sign die Vorzeichenfunktion ist: $\mathrm{sign}(y) = 1$ für $y > 0$ und $\mathrm{sign}(y) = -1$ für $y < 0$. Diese Formel liefert immer einen Polarwinkel im Bereich $-\pi < \varphi < \pi$. Jeder Polarwinkel, der sich von diesem um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheidet, ist natürlich ebenso zulässig.

Ist $z \neq 0$ und liegt auf einer der beiden Achsen (sodass dann entweder x oder y gleich 0 ist), so benötigen wir keine Formel mit Arcusfunktion, um den Polarwinkel anzugeben. Er ist dann 0, $\frac{\pi}{2}$, π oder $\frac{3\pi}{2}$, je nachdem, um welche „Halbachse" es sich handelt. Für $z = 0$ ist der Polarwinkel, wie wir bereits wissen, unbestimmt. Mit (2.6) und – wahlweise – (2.8) oder (2.9) bzw. den Regeln, welche Polarwinkel den vier Halbachsen entsprechen, ist also auch ein Rezept für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten gefunden.

3 Komplexe Exponentialfunktion

Eine der folgenreichsten mathematischen Entdeckungen, die bereits im 18. Jahrhundert gemacht wurde, bestand in der Erkenntnis, dass die Exponentialfunktion auf die komplexen Zahlen erweitert werden kann.

Die reelle Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis ordnet jeder reellen Zahl x die reelle Zahl e^x zu, und für beliebige reelle Zahlen x_1, x_2 gilt die Rechenregel

$$e^{x_1}\, e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}. \tag{3.1}$$

Anstelle von e^x wird manchmal auch $\exp(x)$ geschrieben. Über die reelle Exponentialfunktion informiert das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*, und wir setzen voraus, dass Ihnen die Rechenregel (3.1) bekannt ist.

Der Übergang ins Komplexe beruht auf zwei besonders wichtigen Formeln, die Sie sich merken sollten:

1. Die komplexe Exponentialfunktion ordnet jeder komplexen Zahl $z = x + j\,y$ eine komplexe Zahl e^z zu, die folgendermaßen berechnet wird:

$$e^z = e^x \big(\cos(y) + j\,\sin(y)\big). \tag{3.2}$$

   Dabei ist e^x die Anwendung der reellen Exponentialfunktion auf x. Anstelle von e^z wird manchmal auch $\exp(z)$ geschrieben.

2. Für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt die Rechenregel

$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \tag{3.3}$$

   Mit anderen Worten: Wird e^z wie in (3.2) festgelegt, so gilt dafür die gleiche Regel wie (3.1), nur eben jetzt für beliebige komplexe Zahlen.

Das Wunderbare an der komplexen Exponentialfunktion besteht darin, dass die beiden Formeln (3.2) und (3.3) zusammenspielen. *Warum* e^z durch die Formel (3.2) dargestellt wird, wollen wir an dieser Stelle nicht begründen. (Falls Sie es wissen wollen, gibt Ihnen der Anhang in diesem Skriptum zumindest eine Ahnung davon.) Wichtig ist, dass die durch (3.2) gegebene komplexe Exponentialfunktion formal die gleiche Rechenregel erfüllt wie (3.1), nur eben jetzt für beliebige komplexe Zahlen, also (3.3). (Auch dazu geben wir im Anhang die Andeutung einer Begründung.)

Ist z reell, so reduziert sich e^z auf den reellen Fall, denn mit $z = x + 0 \cdot j$ folgern wir aus (3.2)

$$e^z = e^x \big(\underbrace{\cos(0)}_{1} + j \underbrace{\sin(0)}_{0} \big) = e^x \,. \tag{3.4}$$

Es handelt sich also tatsächlich um eine *Erweiterung der reellen Exponentialfunktion ins Komplexe*: Für reelle Zahlen (= komplexe Zahlen, deren Imaginärteil gleich 0 ist) ergibt sich aus (3.2) die uns bereits bekannte reelle Exponentialfunktion.

Die Beziehung (3.2) hat etwas Verblüffendes an sich: Im Rahmen der reellen Zahlen ist die Exponentialfunktion gewissermaßen der Inbegriff eines grenzenlosen Wachstums oder einer Abnahme zu immer kleineren Werten. Im Gegensatz dazu sind die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus der Inbegriff einer immerwährenden Oszillation oder Schwingung. Vom reellen Standpunkt aus betrachtet, haben die beiden nichts miteinander zu tun. Die Zuordnung $x \mapsto e^x$ hat nichts Oszillierendes an sich. Und nun sehen wir, dass es eine enge Verbindung zwischen der Exponentialfunktion und den Winkelfunktionen gibt, sobald komplexe Zahlen mitspielen dürfen! Für eine rein imaginäre Zahl (also eine komplexe Zahl, deren Realteil gleich 0 ist) reduziert sich (3.2) auf

$$e^{j\,y} = \cos(y) + j \,\sin(y) \qquad \text{für beliebige } y \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Hier sehen wir diesen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den Winkelfunktionen noch deutlicher. (3.5) wird die **Eulersche Formel** genannt. Wir werden sie vor allem in der Form

$$e^{j\,\varphi} = \cos(\varphi) + j \,\sin(\varphi) \tag{3.6}$$

benutzen, wobei φ der Polarwinkel (das Argument) einer komplexen Zahl ist. Aus ihr ergeben sich – zunächst ganz formal – die wichtigen Beziehungen

$$e^{-j\,\varphi} = \cos(-\varphi) + j \,\sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - j \,\sin(\varphi) = \overline{e^{j\,\varphi}} \tag{3.7}$$

sowie

$$e^{0\cdot j} = \underbrace{\cos(0)}_{1} + j\,\underbrace{\sin(0)}_{0} = 1 \tag{3.8}$$

$$e^{j\,\pi/4} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + j\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \tag{3.9}$$

$$e^{j\,\pi/2} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + j\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = j \tag{3.10}$$

$$e^{j\,\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + j\,\underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -1 \tag{3.11}$$

$$e^{2\pi\,j} = \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + j\,\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} = 1. \tag{3.12}$$

Die vorletzte dieser Beziehungen, in der Form

$$e^{j\cdot\pi} + 1 = 0 \tag{3.13}$$

angeschrieben, wird manchmal als die „schönste Formel der Welt“ bezeichnet, da in ihr die wichtigsten Konzepte, die die Mathematik kennt, vereint sind: die Eulersche Zahl e, die imaginäre Einheit j, die Multiplikation $\cdot$, die Kreiszahl π, die Addition $+$, die Eins, die Gleichheit und die Null.

4 Polardarstellung komplexer Zahlen

Nach den bisher geleisteten Vorarbeiten können wir die Darstellung (2.5) einer komplexen Zahl durch ihre Polarkoordinaten r und φ mit Hilfe der Eulerschen Formel (3.6) in die Form

$$z = r\,e^{j\,\varphi} \tag{4.1}$$

bringen. Das ist die bereits angekündigte **Polardarstellung** (auch **komplexe Polardarstellung**, **Exponentialdarstellung** oder **Exponentialform** genannt). Da $r = |z|$ ist – siehe (2.1) –, ist auch hier, wie schon in (2.5), die Information über den Betrag übersichtlich von der Information über den Polarwinkel getrennt. Der Faktor $e^{j\,\varphi}$ ist stets eine komplexe Zahl vom Betrag 1, denn mit (3.6) und (1.3) berechnen wir

$$\left|e^{j\,\varphi}\right| = \big|\cos(\varphi) + j\,\sin(\varphi)\big| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1. \tag{4.2}$$

Man nennt eine in der Form $e^{j\,\varphi}$ gegebene komplexe Zahl auch einen **Phasenfaktor**. (Warum „Phase“ und warum „Faktor“, wird in Abschnitt 7 klar werden.) Geometrisch betrachtet liegt jede solche Zahl auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene, d.h. auf dem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, und der Pfeil, der sie darstellt, schließt mit der positiven reellen Achse einen (im Gegenuhrzeigersinn gemessenen) Winkel φ ein. (Vereinbart man die Konvention, dass φ im Intervall $[0, 2\pi)$ liegt, so ist φ gemäß der Definition des Bogenmaßes genau die Länge jenes Abschnitts des Einheitskreises, der im Gegenuhrzeigersinn von 1 bis $e^{j\,\varphi}$ verläuft.)

Dass im Faktor r in (4.1) die Information über den Betrag von z steckt, wird durch die Rechnung

$$|z| = |\, r\, e^{j\,\varphi}| \overset{(1.11)}{=} \underbrace{|r|}_{r}\, \underbrace{|e^{j\,\varphi}|}_{1} \overset{(4.2)}{=} r \tag{4.3}$$

noch einmal sehr schön illustriert.

Die Polardarstellung einer komplexen Zahl ist im folgenden Sinn eindeutig: Schafft man es, eine komplexe Zahl $z \neq 0$ in der Form $z = a\, e^{j\, b}$ zu schreiben mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$, so ist $a = r$ und, falls $a \neq 0$, $b = \varphi$ (wobei wir nicht vergessen, dass der Polarwinkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist). Dabei ist wichtig, dass $a \geq 0$ sein muss. Die komplexe Zahl $z = -2\, e^{j\pi/3}$ liegt *nicht* in Polardarstellung vor! Um sie in die Polardarstellung zu bringen, benutzen wir (3.11):

$$z = -2\, e^{j\pi/3} = \underbrace{(-1)}_{e^{j\,\pi}}\, 2\, e^{j\pi/3} = 2\, e^{j\,\pi} e^{j\pi/3} \overset{(3.3)}{=} 2\, e^{j\,\pi + j\pi/3} = 2\, e^{4\pi\, j/3}. \tag{4.4}$$

Daher ist $r = 2$ und $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ (oder, wenn Ihnen das lieber ist, $\varphi = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$).

5 Geometrische Deutung der komplexen Multiplikation

Mit Hilfe der Polardarstellung, also der Exponentialform (4.1) können wir nun (endlich!) die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten: Sind $z_1 = r_1\, e^{j\,\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{j\,\varphi_2}$ zwei in Polardarstellung angegebene komplexe Zahlen, so gilt aufgrund der Rechenregel (3.3)

$$z_1\, z_2 = r_1 r_2\, e^{j\,\varphi_1}\, e^{j\,\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{j\,(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{5.1}$$

Da mit $r_1 \geq 0$ und $r_2 \geq 0$ auch $r_1 r_2 \geq 0$ ist, gibt diese Beziehung die Polardarstellung von $z_1\, z_2$ an. Der Betrag von $z_1\, z_2$ ist $r_1 r_2$, also das Produkt der Beträge von z_1 und z_2. Das ist nichts Neues – wir haben es bereits in (1.11) notiert. Eine neue Erkenntnis ist allerdings, dass der Polarwinkel (das Argument) von $z_1\, z_2$ gleich der *Summe* der Polarwinkel (der Argumente) φ_1 und φ_2 der Faktoren z_1 und z_2 ist! Wir können das auch in der Form

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{5.2}$$

anschreiben. (Dabei verlieren wir nicht aus den Augen, dass wir zwei Polarwinkel, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, miteinander identifizieren. Liegt beispielsweise die durch (5.2) angegebene Zahl zwischen 2π und 4π, so können wir 2π subtrahieren, um einen Winkel zwischen 0 und 2π zu erhalten. Wir sparen es uns, diese einfache Idee groß zu theoretisieren und lesen die Beziehung (5.2) in diesem Sinn.) Wir merken uns also:

Wir können zwei komplexe Zahlen multiplizieren, indem wir ihre Beträge multiplizieren und ihre Polarwinkel (d.h. ihre Argumente) addieren. (5.3)

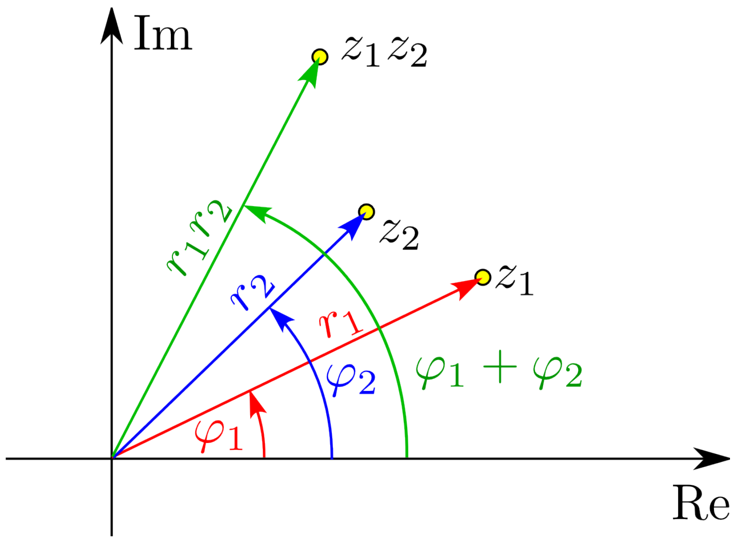


Abbildung 3: Geometrische Deutung der komplexen Multiplikation: Gegeben sind $z_1 = r_1\, e^{j\,\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{j\,\varphi_2}$. Um das Produkt $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{j\,(\varphi_1+\varphi_2)}$ zu erhalten, werden die Beträge von z_1 und z_2 multipliziert und die Polarwinkel (die Argumente) von z_1 und z_2 addiert. Die Richtung des Pfeils $z_1 z_2$ ergibt sich, indem der Pfeil für z_1 im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ_2 gedreht wird (oder, was auf dasselbe hinausläuft, indem der Pfeil für z_2 im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ_1 gedreht wird).

In Abbildung 3 ist dieser Sachverhalt grafisch illustriert.

Damit ist endlich auch die komplexe Multiplikation in die geometrische Deutung der komplexen Zahlen als Punkte bzw. Pfeile in der Zeichenebene mit einbezogen! Zusammen mit der geometrischen Deutung der Addition (als Pfeile-Aneinanderhängen) kann nun die gesamte algebraische Struktur der Menge $\mathbb{C}$ geometrisch interpretiert werden. Dieser Zusammenhang zwischen algebraischen und geometrischen Operationen (oder, wenn Sie so wollen, zwischen Rechnungen und Zeichnungen) ist in der Praxis sehr nützlich. Er hilft, sich im Zuge einer Berechnung ein Bild von den angewandten komplexen Rechenoperationen zu machen, und manchmal macht er Rechnungen sogar überflüssig.

Wenden wir die soeben erlangte Erkenntnis an, um uns zur Beziehung $j^2 = -1$ eine geometrische Vorstellung zu machen: Wegen $|j| = 1$ gilt auch $|j^2| = 1$. Das folgt aus (1.11) bzw. durch Anwendung der Multiplikationsregel (5.3) auf die Beträge. Daher werden sowohl j als auch j^2 durch Punkte am komplexen Einheitskreis dargestellt. Die Zahl j hat (als Punkt auf der positiven imaginären Achse) den Polarwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Daher ist $j = e^{j\,\pi/2}$, in Übereinstimmung mit (3.10). Das Quadrat von j hat wegen

$$\left(e^{j\,\pi/2}\right)^2 = e^{j\,\pi/2} \cdot e^{j\,\pi/2} \overset{(3.3)}{=} e^{j\,\pi/2 + j\,\pi/2} = e^{j\,\pi} \tag{5.4}$$

den Polarwinkel π. Sie können dieses Ergebnis auch mit Hilfe der Multiplikationsregel (5.3) erzielen: j^2 (also das Produkt von j mit sich selbst) hat nach dieser Regel den Polarwinkel $\varphi + \varphi = 2\varphi = \pi$. Da der Polarwinkel π der negativen reellen Achse entspricht, gilt $e^{j\,\pi} = -1$, in Übereinstimmung mit (3.11). Folglich ist $j^2 = -1$. *Voilà* – siehe Abbildung 4! Auf diese Weise „erklärt" die Multiplikationsregel (5.3) geometrisch, warum das Quadrat von j (und ganz allgemein das Quadrat jeder von 0 verschiedenen imaginären Zahl) reell und negativ ist.

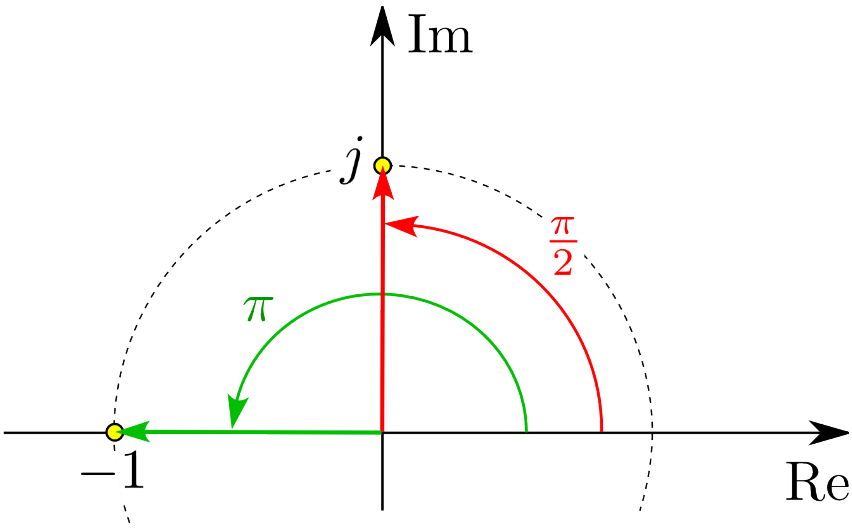


Abbildung 4: Geometrische Deutung der Beziehung $j^2 = -1$: Der Polarwinkel von j ist gleich $\frac{\pi}{2}$. Gemäß der Multiplikationsregel (5.3) ist der Polarwinkel von j^2 gleich $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, was aber genau gleich dem Polarwinkel von -1 ist. Mit anderen Worten: Wird der Pfeil für j im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht, so ergibt sich genau der Pfeil für -1. Wegen $|j| = |-1| = 1$ haben beide Pfeile die Länge 1. Ihre Spitzen liegen daher am (strichliert dargestellten) Einheitskreis.

Wir ergänzen die Multiplikationsregel (5.3) noch durch drei weitere Regeln:

- Die zu $z = r\,e^{j\,\varphi}$ **komplex konjugierte** Zahl ist

$$\overline{z} = r\,e^{-j\,\varphi}. \tag{5.5}$$

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Darstellung (2.5) mit Hilfe der Eulerschen Formel (3.6):

$$\overline{z} = \overline{r\,e^{j\,\varphi}} = r\,\overline{e^{j\,\varphi}} \overset{(3.7)}{=} r\,e^{-j\,\varphi}. \tag{5.6}$$

- Der **Kehrwert** einer komplexen Zahl $z = r\,e^{j\,\varphi}$ wird in der Polardarstellung gemäß der Regel

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,e^{-j\,\varphi} \tag{5.7}$$

berechnet. Zum Beweis rechnen wir nach:

$$r\,e^{j\,\varphi}\,\frac{1}{r}\,e^{-j\,\varphi} = \underbrace{r\,\frac{1}{r}}_{1}\,e^{j\,\varphi}\,e^{-j\,\varphi} = e^{j\,\varphi - j\,\varphi} = e^0 = 1. \tag{5.8}$$

Beachten Sie, dass aus (5.7) die Beziehung

$$\frac{1}{e^{j\,\varphi}} = e^{-j\,\varphi} \tag{5.9}$$

folgt! Der Kehrwert einer komplexen Zahl kann daher in Polardarstellung genauso berechnet werden, wie man das auch für eine Potenz im Rahmen der reellen Zahlen machen würde:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\,e^{j\,\varphi}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{e^{j\,\varphi}} = \frac{1}{r}\,e^{-j\,\varphi}. \tag{5.10}$$

Ein anderer Beweis von (5.7) ergibt sich unter Verwendung von (5.5) aus der bereits früher angeschriebenen Formel (1.6).

- Daraus ergibt sich die Regel für die **Division** komplexer Zahlen in der Polardarstellung: Mit $z_1 = r_1\, e^{j\,\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{j\,\varphi_2}$ ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j\,(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5.11}$$

In Worten: Wir können z_1 durch z_2 dividieren, indem wir den Betrag von z_1 durch den Betrag von z_2 dividieren und vom Polarwinkel von z_1 den Polarwinkel von z_2 subtrahieren. Auch diese Regel ist leicht überprüft: Durch Anwendung von (5.7) auf z_2 erhalten wir

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\,\frac{1}{z_2} = r_1\, e^{j\,\varphi_1}\,\frac{1}{r_2}\, e^{-j\,\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j\,(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5.12}$$

Alternativ dazu können wie genauso vorgehen, wie man Potenzen im Rahmen der reellen Zahlen dividiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{j\,\varphi_1}}{r_2\, e^{j\,\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{e^{j\,\varphi_1}}{e^{j\,\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j\,(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5.13}$$

6 Rechnen in der Polardarstellung

Wir können also jetzt komplexe Zahlen rechnerisch in der Komponentendarstellung – siehe (1.1) – und in der Polardarstellung – siehe (5.1) – multiplizieren, und wir können die Multiplikation entsprechend der Regel (5.3) geometrisch deuten.

Um ein Gefühl für die Auswirkung der Multiplikation auf die Polarwinkel zu bekommen, kann man sich auf komplexe Zahlen beschränken, die auf dem Einheitskreis liegen. Beliebige Produkte solcher komplexer Zahlen liegen dann ebenfalls auf dem Einheitskreis. Ein Beispiel dafür haben wir bereits in Abbildung 4 gesehen, Abbildung 5 zeigt zwei weitere.

Aus der Multiplikationsregel (5.3) folgt ein weiterer sehr netter Sachverhalt: Ist eine komplexe Zahl $z \neq 0$ gegeben, so können wir sie mit j multiplizieren. Wegen $j = e^{j\,\pi/2}$ ist der Polarwinkel des Produkts $j\,z$ gleich der Summe

$$\big(\text{Polarwinkel von } z\big) + \frac{\pi}{2}\,. \tag{6.1}$$

Das bedeutet, dass der Pfeil für $j\,z$ auf den Pfeil für z normal steht: Wir erhalten ihn aus dem Pfeil für z durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ (d.h. 90°) im Gegenuhrzeigersinn.

Multiplikation mit j ist gleichbedeutend mit einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn. (6.2)

Falls Sie die Übungsaufgaben des Vorgängerskriptums bearbeitet haben, haben Sie ein Beispiel dafür bereits kennengelernt.

In der Polardarstellung fällt es auch leicht, **Potenzen komplexer Zahlen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten** zu berechnen. Für $z = r\, e^{j\,\varphi}$ und $n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich

$$z^n = \big(r\, e^{j\,\varphi}\big)^n = r^n\, e^{j\,n\,\varphi}, \tag{6.3}$$

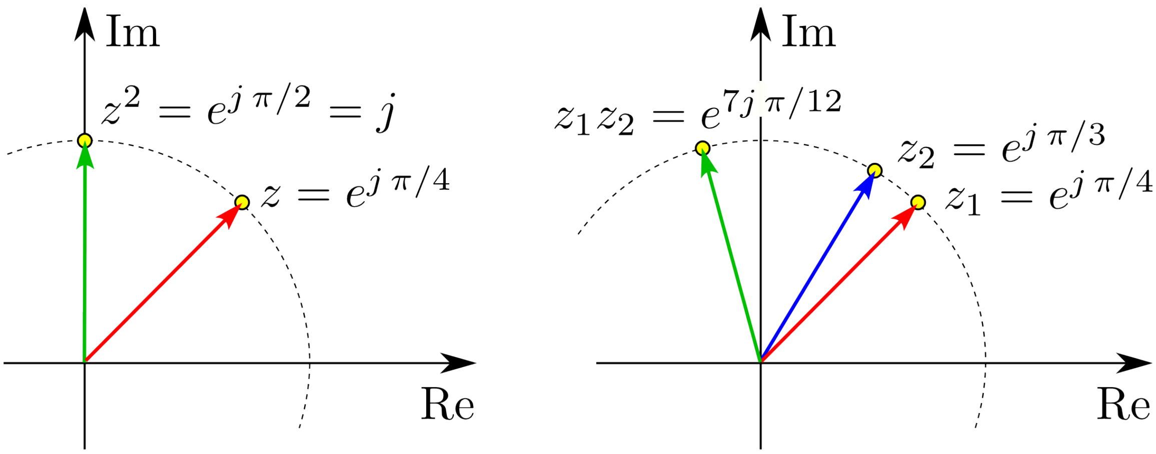


Abbildung 5: Zwei Beispiele für die Multiplikation komplexer Zahlen mit Betrag 1: Links: Das Quadrat von $z = e^{j\,\pi/4}$ ist gleich j. Das ergibt sich rechnerisch aus $z^2 = \left(e^{j\,\pi/4}\right)^2 = e^{2\,j\,\pi/4} = e^{j\,\pi/2} = j$ und geometrisch durch Verdoppelung des Polarwinkels von z.
Rechts: Die auftretenden Polarwinkel sind $\frac{\pi}{4}$ (entspricht $45°$ im Gradmaß), $\frac{\pi}{3}$ (entspricht $60°$) und $\frac{7\pi}{12}$ (entspricht $105°$). $z_1 z_2$ wird erhalten, indem der Pfeil für z_1 im Gegenuhrzeigersinn um $60°$ gedreht wird (bzw. indem der Pfeil für z_2 im Gegenuhrzeigersinn um $45°$ gedreht wird).

wobei z^{-n} für positives n wie im Reellen als $\dfrac{1}{z^n}$ und z^0 als 1 definiert ist.

Mit Hilfe der Polardarstellung bzw. der Multiplikationsregel (5.3) lässt sich jetzt auch das Thema des **Wurzelziehens** in $\mathbb{C}$ sehr einfach behandeln. Stellen wir die Frage zunächst so: Gegeben sei eine komplexe Zahl w. Gibt es eine oder mehrere komplexe Zahlen z, für die

$$z^2 = w \tag{6.4}$$

gilt? Dazu schreiben wir w in Polardarstellung an, also $w = r\,e^{j\,\varphi}$, wobei $r \geq 0$ ist und der Polarwinkel im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ liegen soll. Dann ist

$$z_1 = \sqrt{r}\,e^{j\,\varphi/2} \tag{6.5}$$

eine solche Zahl, denn es gilt ${z_1}^2 = \left(\sqrt{r}\,e^{j\,\varphi/2}\right)^2 = r\left(e^{j\,\varphi/2}\right)^2 = r\,e^{j\,\varphi} = w$. Dass die komplexe Zahl z_1, deren Polarwinkel halb so groß ist wie jener von w, die Gleichung (6.4) erfüllt, ist auch ohne Rechnung aufgrund der Multiplikationsregel (5.3) klar: Eine komplexe Zahl wird quadriert, indem ihr Betrag quadriert und ihr Polarwinkel verdoppelt wird. Folglich findet man *eine* Lösung von (6.4), indem man aus dem Betrag von w die Wurzel zieht und den Polarwinkel von w halbiert. Ist $w = 0$, also $r = 0$ (und der Wert von φ unbestimmt), so ist $z_1 = 0$, und das ist auch die einzige komplexe Zahl, deren Quadrat w ist. Ist $w \neq 0$, so ist

$$z_2 = -z_1 \tag{6.6}$$

ebenfalls eine solche Zahl, denn ${z_2}^2 = (-z_1)^2 = {z_1}^2 = w$. Damit ist eine zweite Lösung der Gleichung (6.4) gefunden. Mit $-1 = e^{j\,\pi}$ finden wir ihre Polardarstellung:

$$z_2 = (-1)\cdot z_1 = e^{j\,\pi}\sqrt{r}\,e^{j\,\varphi/2} = \sqrt{r}\,e^{j\,(\varphi/2+\pi)}. \tag{6.7}$$

(Sehen Sie sich dieses Argument genau an: Eine komplexe Zahl mit -1 zu multiplizieren ist gleichbedeutend damit, zu ihrem Polarwinkel π zu addieren!) Wir können die Polardarstellung von z_2 auch direkt nachprüfen:

$$z_2{}^2 = \left(\sqrt{r}\, e^{j\,(\varphi/2+\pi)}\right)^2 = r\, e^{2j\,(\varphi/2+\pi)} = r\, e^{j\,(\varphi+2\pi)} = r\, e^{j\,\varphi} \underbrace{e^{2\pi\, j}}_{1} = r\, e^{j\,\varphi} = w. \tag{6.8}$$

Die Polarwinkel der beiden Lösungen von (6.4) sind daher $\frac{\varphi}{2}$ und $\frac{\varphi}{2} + \pi$. Diese Situation ist in Abbildung 6 für $w = j$ dargestellt. Dass (6.4) keine weiteren Lösungen besitzt, sehen wir

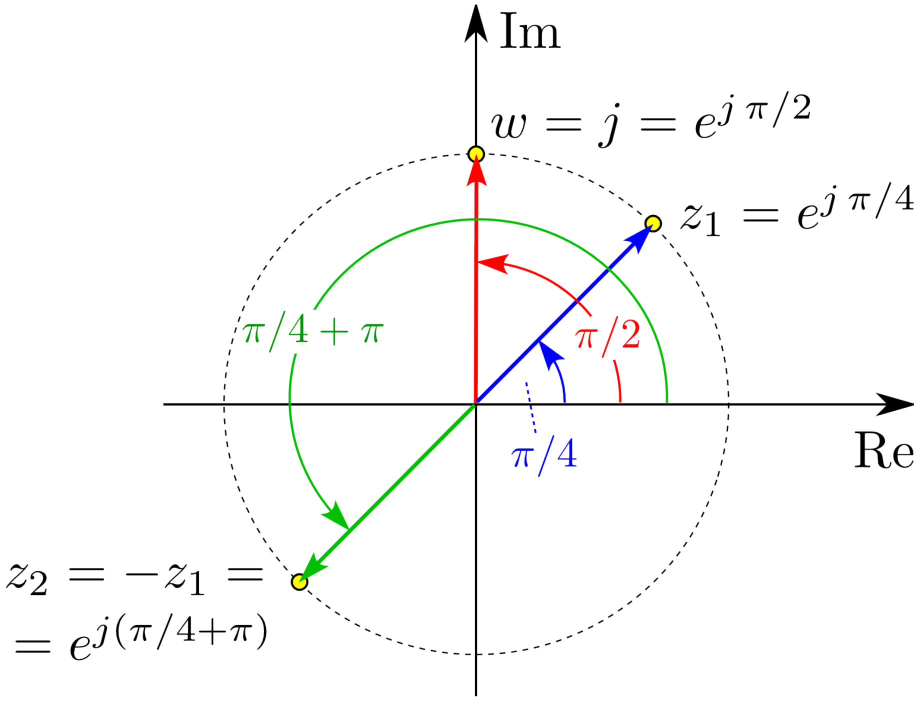


Abbildung 6: Die Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ für $w = j$: Der Polarwinkel von w ist $\frac{\pi}{2}$, jener der Lösung z_1 ist $\frac{\pi}{4}$ und jener der zweiten Lösung $z_2 = -z_1$ ist $\frac{\pi}{4} + \pi$. Beachten Sie, dass die Addition von π zum Polarwinkel von z_1 gleichbedeutend damit ist, z_1 mit -1 zu multiplizieren, d.h. die Orientierung von z_1 umzudrehen!

mit Hilfe eines kleinen Tricks ein, der in ähnlicher Form bereits im Skriptum *Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene* angewandt wurde: Wir schreiben die Gleichung (6.4) in der Form $z^2 = z_1{}^2$, was äquivalent zu $z^2 - z_1{}^2 = 0$ ist, und formen sie mit Hilfe der binomischen Formel $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ zu

$$(z - z_1)(z + z_1) = 0 \tag{6.9}$$

um. Daraus folgt, dass zumindest einer der beiden Faktoren gleich 0 ist, d.h. dass entweder $z = z_1$ oder $z = -z_1$ (d.h. $z = z_2$) gilt. Damit ist das Problem des komplexen Wurzelziehens ganz allgemein gelöst.

Nun können wir die Begründung eines Sachverhalts nachtragen, der im Vorgängerskriptum *Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene* erwähnt wurde: Im Rahmen der reellen Zahlen ist die Wurzel einer positiven reellen Zahl a jene positive Zahl x, deren Quadrat gleich a ist.

Die Geichung $x^2 = a$ hat dann zwei reelle Lösungen, von denen eine „die Wurzel aus a“ ist, geschrieben $\sqrt{a}$, und die andere $-\sqrt{a}$. Im Komplexen hat die Gleichung $z^2 = w$ für ein gegebenes $w \in \mathbb{C}$ $(w \neq 0)$ ebenfalls zwei Lösungen (oben als z_1 und z_2 bezeichnet, siehe (6.5) und (6.7)), aber wir haben keine Handhabe, eine von beiden zu bevorzugen und „die Wurzel aus w“ zu nennen (und die andere dementsprechend als „minus Wurzel aus w“). Sie erinnern sich auch an die Empfehlung, das Wurzelsymbol $\sqrt{\ }$ im Rahmen der komplexen Zahlen eher nicht zu verwenden (ausgenommen mit dem Doppelvorzeichen $\pm\sqrt{\ }$ in der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, die ja ohnehin *beide* Lösungen meint). Aus historischen Gründen hat sich, wenn es um komplexe Zahlen geht, die Sprechweise eingebürgert, beide Lösungen, z_1 und z_2, als „die Wurzeln aus w“ zu bezeichnen. Warum ist das so? Hier die Begründung:

> Wir stellen w in der Form $r\,e^{j\,\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ dar und vereinbaren probeweise die Regel, $z_1 = \sqrt{r}\,e^{j\,\varphi/2}$ als „die Wurzel aus w“ zu bezeichnen. Nun vergrößern wir den Polarwinkel φ kontinuierlich, d.h. wir lassen den Pfeil, der w darstellt, im Gegenuhrzeigersinn rotieren, bis φ nur noch ein bisschen kleiner als 2π ist. Die entsprechende Wurzel z_1 ist dann ungefähr gleich $\sqrt{r}\,e^{j\,\pi}$, also ungefähr gleich $-\sqrt{r}$. Jetzt drehen wir den Pfeil noch ein kleines Stück weiter, bis er auf der reellen Achse liegt. Dann ist aber $\varphi = 0$, und dementsprechend gilt $z_1 = \sqrt{r}\,e^{0\cdot j} = \sqrt{r}$. Hoppla! Wenn w auf diese Weise die reelle Achse passiert, springt „die Wurzel aus w“ gemäß unserer Regel abrupt von $-\sqrt{r}$ auf $\sqrt{r}$. Ein solches („unstetiges“) Verhalten ist nicht gerade, was man sich in der Mathematik wünscht! Das ist der Grund, warum die beiden Wurzeln $\pm z_1$ als gleichberechtigt angesehen werden. Überlegen Sie selbst, warum es dann kein „Unstetigkeitsproblem“ mehr gibt!

Manchmal werden höhere Wurzeln einer gegebenen komplexen Zahl benötigt. Wir vertiefen uns nicht in das Thema, sondern geben nur das Rezept an: Die dritten Wurzeln einer komplexen Zahl $w = r\,e^{j\,\varphi} \neq 0$, d.h. die Lösungen der Gleichung

$$z^3 = w, \tag{6.10}$$

sind gegeben durch

$$z_1 = \sqrt[3]{r}\,e^{j\,\varphi/3} \tag{6.11}$$
$$z_2 = \sqrt[3]{r}\,e^{j\,(\varphi/3+2\pi/3)} \tag{6.12}$$
$$z_3 = \sqrt[3]{r}\,e^{j\,(\varphi/3+4\pi/3)} = \sqrt[3]{r}\,e^{j\,(\varphi/3-2\pi/3)}. \tag{6.13}$$

Allgemein besitzt jede von 0 verschiedene komplexe Zahl n n-te Wurzeln, also 4 vierte Wurzeln, 5 fünfte Wurzeln, usw. Geometrisch bilden diese n-ten Wurzeln ein regelmäßiges n-Eck, wobei *eine* der n-ten Wurzeln aus z durch $z_1 = \sqrt[n]{r}\,e^{j\,\varphi/n}$ gegeben ist. Damit sind auch alle anderen n-ten Wurzeln eindeutig bestimmt.

Die Polardarstellung ist auf die Multiplikation komplexer Zahlen zugeschnitten und eignet sich daher bestens zur Behandlung von Problemen, die durch Multiplikationen ausgedrückt werden können. Für die **Addition komplexer Zahlen** ist sie weniger gut geeignet. Liegen zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1\,e^{j\,\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,e^{j\,\varphi_2}$ in Polardarstellung vor, und soll ihre

Summe $z = z_1 + z_2$ berechnet werden, so muss man z_1 und z_2 zuerst mit Hilfe der Eulerschen Formel (3.6) in die Komponentendarstellung bringen, um die Summe ausführen zu können:

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= r_1\, e^{j\,\varphi_1} + r_2\, e^{j\,\varphi_2} = \\ &= r_1\big(\cos(\varphi_1) + j\,\sin(\varphi_1)\big) + r_2\big(\cos(\varphi_2) + j\,\sin(\varphi_2)\big) = \\ &= \underbrace{r_1\,\cos(\varphi_1) + r_2\,\cos(\varphi_2)}_{\mathrm{Re}(z)} + j\,\underbrace{\big(r_1\,\sin(\varphi_1) + r_1\,\sin(\varphi_2)\big)}_{\mathrm{Im}(z)}\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Möchte man dieses Ergebnis nun in Polardarstellung, also in der Form $z = r\, e^{j\,\varphi}$ anschreiben, so muss man r mit Formel (2.6) und φ mit Hilfe einer der beiden Formeln (2.8) oder (2.9) berechnen (wobei für x der Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und für y der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ einzusetzen ist). Im nächsten Abschnitt werden wir das anhand eines Zahlenbeispiels vorführen (siehe (7.29)–(7.34)).

7 Anwendungen: Kreisbewegung und Schwingungen

Die Nützlichkeit der komplexen Zahlen und insbesondere der Polardarstellung für technische Anwendungen liegt zu einem guten Teil in dem Umstand begründet, dass eine **harmonische Schwingung** (eine „Sinusschwingung“) auf eine **Kreisbewegung** zurückgeführt werden kann.

Kleiner **Einschub**: Von einer harmonischen Schwingung spricht man, wenn die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit t durch einen Ausdruck vom Typ

$$A\,\sin\big(\omega\, t + \delta\big) \tag{7.1}$$

beschrieben werden kann. Dabei sind A, ω (beide üblicherweise positiv) und δ Konstanten, hängen also nicht von der Zeit ab. Was sie bedeuten, werden wir gleich besprechen. Zuvor merken wir an, dass man (7.1) auch durch eine Cosinusfunktion ausdrücken kann, da die Sinus- und die Cosinusfunktion nur „phasenverschobene“ Varianten voneinander sind. Das wird formal durch die Beziehungen

$$\sin(\varphi) = \cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{2}\Big) \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \sin\Big(\varphi + \frac{\pi}{2}\Big)\,, \tag{7.2}$$

die für beliebige reelle Zahlen φ gelten, ausgedrückt. Jede Sinusfunktion lässt sich mit Hilfe einer bloßen Verschiebung im Argument als Cosinusfunktion schreiben und umgekehrt. Der allgemeine Ausdruck (7.1) kann damit zu

$$A\,\cos\big(\omega\, t + \underbrace{\delta - \frac{\pi}{2}}_{\delta'}\big) \tag{7.3}$$

umgeformt werden. Daher ist es gleichgültig, ob eine harmonische Schwingung mit Hilfe der Sinus- oder der Cosinusfunktion beschrieben wird. Manchmal werden Funktionen der Form $t \mapsto A\,\sin\big(\omega\, t + \delta\big)$ oder $t \mapsto A\,\cos\big(\omega\, t + \delta\big)$ unter dem Oberbegriff „allgemeine Sinusfunktion“ zusammengefasst, und in diesem Sinn ist auch der Ausdruck „Sinusschwingung“ zu verstehen.

Betrachten wir nun in der komplexen Ebene einen Punkt, der einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius A im Gegenuhrzeigersinn umrundet. Er soll sich gleichmäßig bewegen, d.h. der Polarwinkel φ, der dem Punkt entspricht, soll gleichförmig mit der Zeit anwachsen. Bezeichnet $\varphi(t)$ den Polarwinkel zum Zeitpunkt t und ist $\varphi(0) = 0$, d.h. ist der Polarwinkel zum Zeitpunkt 0 ebenfalls gleich 0, so wächst $\varphi(t)$ proportional zur Zeit t an. Es gilt dann[9]

$$\varphi(t) = \omega\, t \tag{7.4}$$

für eine positive Konstante ω, die die **Winkelgeschwindigkeit** der Umlaufbewegung genannt wird. Hat der Polarwinkel zur Zeit 0 einen anderen Wert, $\varphi(0) = \delta$, so kommt zu (7.4) noch δ dazu, sodass dann für beliebige Zeiten

$$\varphi(t) = \omega\, t + \delta \tag{7.5}$$

gilt. Die Position des umlaufenden Punktes zur Zeit t ist dann durch die komplexe Zahl

$$z(t) = A\, e^{j\,\varphi(t)} = A\, e^{j\,(\omega\, t + \delta)} \tag{7.6}$$

gegeben. Während einer kompletten Umrundung wächst $\varphi(t)$ um 2π an. Wegen (7.5) muss t um $\frac{2\pi}{\omega}$ anwachsen, damit $\varphi(t)$ um 2π anwächst. Daraus folgt, dass die **Umlaufszeit**, d.h. die Zeit, die der Punkt für eine komplette Umrundung benötigt, durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{7.7}$$

gegeben ist.

Real- und Imaginärteil von $z(t)$, d.h. die kartesischen Koordinaten des umlaufenden Punktes, berechnen sich dann mit der Eulerschen Formel (3.6) zu

$$x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = A\, \cos\big(\omega\, t + \delta\big) \tag{7.8}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}(z(t)) = A\, \sin\big(\omega\, t + \delta\big). \tag{7.9}$$

Hier haben wir die „Sinusschwingung“, gleich in zwei Ausgaben! Liest man die Beziehungen (7.8) und (7.9) geometrisch, so besagen sie, dass eine harmonische Schwingung als Projektion einer Kreisbewegung (wahlweise in eine der Koordinatenrichtungen) aufgefasst werden kann. Bildlich gesprochen: Betrachtet man die Umlaufbewegung unseres Punktes „von oben“ bzw. „von der Seite“, so sieht man Schwingungen vom Typ (7.8) bzw. (7.9). Diese Sichtweise auf Schwingungen ist auch dann möglich, wenn gar kein Kreis und kein Umlauf um einen Kreis im Spiel sind. Der um den Kreis laufende Punkt ist dann lediglich ein (nützliches) mathematisches Modell. Die Größe φ und die Konstanten δ, A, ω und T bekommen nun im Kontext einer harmonischen Schwingung andere Bedeutungen und dementsprechend auch andere Namen:

- φ ist die **Phase** der Schwingung. Während eines einzelnen Schwingungsvorgangs (der einer kompletten Umrundung des Kreises entspricht) wächst sie um 2π, da die Sinus- und die Cosinusfunktion periodisch mit (kleinster) Periode 2π sind.

[9] (7.4) und (7.5) sind ganz analog zur geradlinig-gleichförmigen Bewegung: Bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwindigkeit v entlang einer Geraden, sagen wir der x-Achse, und ist er zur Zeit 0 am Ort 0, so ist er zur Zeit t am Ort $x(t) = v\, t$. Ist er zur Zeit 0 am Ort $x(0) = x_0$, so ist er zur Zeit t am Ort $x(t) = v\, t + x_0$.

- δ, der Wert von φ zur Zeit 0, ist die **Anfangsphase**, auch **Phasenverschiebung** oder **Nullphasenwinkel** genannt.
- A ist die **Amplitude**, d.h. der größte Wert, den $x(t)$ bzw. $y(t)$ annehmen kann.
- ω heißt **Kreisfrequenz**. In diesem Namen klingt noch nach, dass die Schwingung als Projektion einer Kreisbewegung erhalten worden ist.
- T ist die **Schwingungsdauer** oder **Periodendauer**, d.h. die Zeit, in der ein einzelner Schwingungsvorgang vollständig durchlaufen wird.

Die **Frequenz** f, d.h. die Anzahl der Schwingungsvorgänge pro Zeitintervall, ist gleich dem Kehrwert der Schwingungsdauer[10], woraus mit (7.7)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.10}$$

folgt. Die Kreisfrequenz ist das 2π-fache der Frequenz. Damit haben wir die wichtigsten Kenngrößen, die eine harmonische Schwingung beschreiben, beisammen.

Der springende Punkt ist nun, dass manche Berechnungen, die eigentlich die reellen Schwingungsgrößen (7.8) und (7.9) betreffen, stattdessen mit dem um den Kreis laufenden Punkt, beschrieben durch die zeitlich veränderliche komplexe Zahl (7.6), durchgeführt werden können. Rechentechnisch ergeben sich dadurch große Vereinfachungen, die letztlich darauf zurückzuführen sind, dass die Exponentialfunktion die schöne Rechenregel (3.3) erfüllt. So werden beispielsweise in der Wechselstromtechnik eine komplexe Spannung, eine komplexe Stromstärke und ein komplexer Widerstand eingeführt, die eigentlich nur mathematische Modelle einer reellen Spannung, einer reellen Stromstärke und eines reellen Widerstands sind. Um Aussagen über die tatsächlich auftretenden (reellen) Größen zu bekommen, wird an geeigneter Stelle einfach der Real- oder der Imaginärteil der entsprechenden komplexen Größe gebildet. In der Praxis läuft das oft darauf hinaus, das Produkt zweier komplexer Zahlen zu berechnen (eine in der Polardarstellung sehr leicht durchzuführende Operation) und vom Ergebnis den Real- oder Imaginärteil zu bilden.

Sehen wir uns das etwas genauer an: Wir nehmen an, in einem Anwendungskontext tritt eine (reelle) Größe g auf, deren Abhängigkeit von der Zeit t durch

$$g(t) = \widehat{g}\, \sin(\omega\, t + \delta) \tag{7.11}$$

gegeben ist. Die Amplitude $\widehat{g}$, die Kreisfrequenz ω und die Anfangsphase δ sind reell, $\widehat{g}$ und ω sind positiv. Anstelle von g führen wir die komplexe Größe

$$\underline{g}(t) = \widehat{g}\; e^{j\,(\omega\, t+\delta)} \tag{7.12}$$

ein.

[10] Begründung: Eine Periodendauer von 10 Sekunden (also $T = 10\,\mathrm{s}$) entspricht einer Frequenz von $\frac{1}{10}$ Schwingungen pro Sekunde, d.h. $\frac{1}{10}\,\mathrm{Hz}$ oder $\frac{1}{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. Das ist genau $\frac{1}{T}$. Überzeugt? Ein anderes Argument: Es findet stets 1 Schwingungsvorgang pro Periodendauer T statt. Die Zahl Anzahl der Schwingungsvorgänge pro Zeitintervall ist daher gleich der Zahl der Schwingungsvorgänge pro Periodendauer (also 1) dividiert durch die Periodendauer T, insgesamt $f = \frac{1}{T}$.

> **Anmerkung zu den Bezeichnungen**: Wir haben hier eine der gebräuchlichen Konventionen benutzt, die dazu dienen, die verwendeten Symbole übersichtlich und ihre Anzahl klein zu halten:
>
> - Die Amplitude einer Schwingungsgröße wird durch ein über das Symbol für diese Größe gestelltes Dach $\widehat{\ }$ bezeichnet.
> - Komplexe Größen werden mit einem Unterstrich _ gekennzeichnet.

$g(t)$ ist dann der Imaginärteil von $\underline{g}(t)$:

$$g(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{g}(t)\right). \tag{7.13}$$

Mit Hilfe der Rechenregel (3.3) können wir (7.12) so umformen:

$$\underline{g}(t) = \underbrace{\widehat{g}\; e^{j\,\delta}}_{\underline{\widehat{g}}}\; e^{j\,\omega\,t} = \underline{\widehat{g}}\; e^{j\,\omega\,t} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\widehat{g}} = \widehat{g}\; e^{j\,\delta}. \tag{7.14}$$

Die Größe $\underline{\widehat{g}}$ nennen wir **komplexe Amplitude**. Mit ihrer Hilfe nimmt $\underline{g}(t)$ die sehr einfache Form

$$\underline{g}(t) = \underline{\widehat{g}}\; e^{j\,\omega\,t} = \text{komplexe Amplitude} \cdot e^{j\,\omega\,t} \tag{7.15}$$

an. Wiederholen wir nun zum besseren Verständnis, wie sich diese Situation geometrisch darstellt! Dazu verfolgen wir die zeitliche Entwicklung des Zeigers[11], der $\underline{g}(t)$ darstellt, ab dem Anfangszeitpunkt $t = 0$. Da sich $e^{j\,\omega\,t}$ für $t = 0$ auf 1 reduziert, folgt

$$\underline{g}(0) = \underline{\widehat{g}} = \widehat{g}\, e^{j\,\delta}. \tag{7.16}$$

Zu Beginn ist der Zeiger also beim Polarwinkel δ und hat den Betrag $\left|\underline{\widehat{g}}\right| = \widehat{g}$. Die Anfangsphase δ wird durch die Verwendung einer komplexen Amplitude automatisch berücksichtigt! Zu einem späteren Zeitpunkt t ist $\underline{g}(t)$ gleich dem Produkt $\underline{\widehat{g}}\; e^{j\,\omega\,t}$. Nun bedenken wir, dass $e^{j\,\omega\,t}$ den Betrag 1 und den Polarwinkel $\omega\,t$ hat, und wenden die Multiplikationsregel (5.3) an: Zum Zeitpunkt t hat der Zeiger nach wie vor den Betrag $\widehat{g}$, aber der Polarwinkel ist nun gleich der Summe $\omega\,t + \delta$, er ist also seit dem Anfangszeitpunkt um $\omega\,t$ vorgerückt. Das ist genau, was (7.12) ausdrückt: Der Zeiger rotiert bei gleichbleibender Länge mit Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn. Die Zeitabhängigkeit der reellen Größe (7.11), von der wir ausgegangen sind, wird geometrisch als die Projektion der Bewegung der Spitze des Zeigers auf die imaginäre Achse dargestellt und durch Bilden des Imaginärteils von $\underline{g}(t)$ berechnet[12].

Wir können die hier auftretende Zeitentwicklung auch so betrachten: $\underline{g}(t)$ ist das Produkt der drei Größen $\widehat{g}$, $e^{j\,\delta}$ und $e^{j\,\omega\,t}$, woraus sich folgende Interpretation ergibt:

[11] Wie eingangs erwähnt, wird ein Pfeil, der eine komplexe Zahl darstellt, auch als *Zeiger* bezeichnet. Das ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es um eine komplexe Zahl geht, die einen Kreis umläuft. Denken Sie einfach an einen Uhrzeiger, um sich eine Vorstellung davon zu machen! Beachten Sie dabei aber, dass der mathematisch positive Umlaufsinn der Gegenuhrzeigersinn ist!

[12] Man hätte in (7.11) statt der Sinusfunktion genauso gut die Cosinusfunktion verwenden können – siehe (7.2) und (7.3). Die Zeitabhängigkeit von $g(t)$ wäre dann geometrisch als die Projektion der Bewegung der Spitze des Zeigers auf die *reelle* Achse dargestellt und müsste durch Bilden des *Realteils* von $\underline{g}(t)$ berechnet werden.

- Wir beginnen mit der reellen Amplitude $\widehat{g}$. Sie entspricht einem Zeiger der Länge $\widehat{g}$ auf der positiven reellen Achse.
- Durch Multiplikation von $\widehat{g}$ mit $e^{j\,\delta}$ ergibt sich der um den Winkel δ gedrehte Zeiger, der die komplexe Amplitude darstellt. Dadurch wird die Anfangsphase berücksichtigt: $\widehat{g}\,e^{j\,\delta}$ gibt die Zeigerstellung zur Zeit 0 an.
- Durch Multiplikation von $\widehat{g}\,e^{j\,\delta}$ mit $e^{j\,\omega\,t}$ rückt die Phase um $\omega\,t$ vor: $\widehat{g}\,e^{j\,\delta}\,e^{j\,\omega\,t}$ ist die Zeigerstellung zum Zeitpunkt t.

Da die Multiplikation mit den Faktoren $e^{j\,\delta}$ und $e^{j\,\omega\,t}$ jeweils nur darin besteht, die Phase zu ändern (also den Zeiger zu drehen), wird generell eine komplexe Zahl der Form $e^{j\,\varphi}$ für ein reelles φ ein **Phasenfaktor** genannt.

Abgesehen von der vereinfachten geometrischen Interpretation der Zeitabhängigkeit hat die Verwendung komplexer Schwingungsgrößen auch andere Vorteile, etwa wenn Sie die **Zeitableitung** einer solchen Größe berechnen müssen. Da die Zeitabhängigkeit von $\underline{g}(t)$ lediglich im Faktor $e^{j\,\omega\,t}$ steckt (die komplexe Amplitude $\widehat{\underline{g}}$ ist ja zeitunabhängig), benötigt man für $\underline{g}'(t)$ die Zeitableitung von $e^{j\,\omega\,t}$. Sie ist durch

$$\frac{d}{dt}\,e^{j\,\omega\,t} = j\,\omega\,e^{j\,\omega\,t} \tag{7.17}$$

gegeben (wobei die gleichen Ableitungsregeln verwendet werden wie bei der reellen Exponentialfunktion). Man erhält also die Ableitung von $e^{j\,\omega\,t}$ nach t, indem man $e^{j\,\omega\,t}$ mit $j\,\omega$ multipliziert, und das Gleiche gilt für die Ableitung der komplexen Schwingungsgröße:

$$\underline{g}'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\widehat{\underline{g}}\;e^{j\,\omega\,t}\Big) = \widehat{\underline{g}}\;\frac{d}{dt}\,e^{j\,\omega\,t} = \widehat{\underline{g}}\;j\,\omega\,e^{j\,\omega\,t} = j\,\omega\,\underline{g}(t). \tag{7.18}$$

Das ist ein *sehr* einfaches „Kochrezept“! Wenn man nur mit reellen Größen arbeitet und die Zeitableitung einer harmonischen Schwingung berechnet, so muss man berücksichtigen, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Cosinusfunktion ist, also eine „phasenverschobene Sinusfunktion“ – das erspart man sich in der komplexen Variante. Diese Vereinfachung wird in der *komplexen Wechselstromrechnung* benutzt.

In technischen Anwendungen hat man es nicht immer nur mit einer einzigen Schwingung vom Typ (7.11) bzw. (7.12) zu tun. Oft treten **mehrere** Schwingungsvorgänge auf, die zueinander phasenverschoben sind und unterschiedliche Amplituden, aber die gleiche Kreisfrequenz besitzen. Ist

$$h(t) = \widehat{h}\,\sin\big(\omega\,t + \mu\big) \tag{7.19}$$

mit (reeller) Amplitude $\widehat{h}$ und Anfangsphase μ eine zweite solche Größe, so führen wir die entsprechende komplexe Größe

$$\underline{h}(t) = \widehat{h}\;e^{j\,(\omega\,t+\mu)} = \underbrace{\widehat{h}\;e^{j\,\mu}}_{\widehat{\underline{h}}}\;e^{j\,\omega\,t} = \widehat{\underline{h}}\;e^{j\,\omega\,t} \tag{7.20}$$

mit komplexer Amplitude $\widehat{\underline{h}}$ ein. Analog zu (7.13) ist $h(t)$ der Imaginärteil von $\underline{h}(t)$. Nun wollen wir – wie es in Anwendungen oft der Fall ist – die **Überlagerung** (mathematisch gesprochen:

die Summe) unserer zwei zueinander phasenverschobenen Schwingungen bilden. Für die reellen Größen $g(t)$ und $h(t)$ würde das bedeuten, die Summe

$$s(t) = \widehat{g}\,\sin(\omega\,t + \delta) + \widehat{h}\,\sin\big(\omega\,t + \mu\big) \tag{7.21}$$

zu berechnen. Das kann man natürlich, indem geeignete Additionstheoreme herangezogen werden[13]. Einfacher stellt sich diese Summenbildung aber für die komplexen Größen dar:

$$\underline{s}(t) = \widehat{\underline{g}}\; e^{j\,\omega\,t} + \widehat{\underline{h}}\; e^{j\,\omega\,t} = \underbrace{(\,\widehat{\underline{g}} + \widehat{\underline{h}}\,)}_{\widehat{\underline{s}}}\; e^{j\,\omega\,t} = \widehat{\underline{s}}\; e^{j\,\omega\,t}\,. \tag{7.22}$$

Sie wird bewerkstelligt, indem die komplexen Amplituden addiert werden, d.h. die komplexe Amplitude der Überlagerung ist gegeben durch

$$\widehat{\underline{s}} = \widehat{\underline{g}} + \widehat{\underline{h}}. \tag{7.23}$$

Der zeitabhängige Faktor $e^{j\,\omega\,t}$ ist davon nicht betroffen. Um die reelle Größe (7.21), um die es ja letztlich geht, zu erhalten, bilden wir nach der Berechnung von $\widehat{\underline{s}}$ den Imaginärteil von (7.22). Da (7.22) von der Form

$$\underline{s}(t) = \text{komplexe Zahl} \;\cdot\; e^{j\,\omega\,t} \tag{7.24}$$

ist, folgt sofort, dass es sich dabei wieder um eine harmonische Schwingung handelt. Deren Kreisfrequenz ist ω, während die Information über ihre reelle Amplitude und ihre Anfangsphase in der komplexen Amplitude $\widehat{\underline{s}}$ enthalten ist. Manchmal muss auch $\widehat{\underline{s}}$ in Polardarstellung

$$\widehat{\underline{s}} = \widehat{s}\; e^{j\,\gamma} \tag{7.25}$$

angegeben werden. Um die reelle Amplitude $\widehat{s}$ und die Anfangsphase γ zu bestimmen, werden $\mathrm{Re}(\widehat{\underline{s}})$ und $\mathrm{Im}(\widehat{\underline{s}})$ benötigt, die unter Verwendung der Eulerschen Formel (3.6) gemäß

$$\mathrm{Re}(\widehat{\underline{s}}) \;=\; \mathrm{Re}(\widehat{\underline{g}}) + \mathrm{Re}(\widehat{\underline{h}}) \tag{7.26}$$

$$\mathrm{Im}(\widehat{\underline{s}}) \;=\; \mathrm{Im}(\widehat{\underline{g}}) + \mathrm{Im}(\widehat{\underline{h}}) \tag{7.27}$$

berechnet werden. Die reelle Amplitude $\widehat{s}$ ist dann durch

$$\widehat{s} = |\,\widehat{\underline{s}}\,| = \sqrt{\mathrm{Re}(\widehat{\underline{s}})^2 + \mathrm{Im}(\widehat{\underline{s}})^2} \tag{7.28}$$

gegeben. Die Anfangsphase γ wird mit einer der beiden Formeln (2.8) oder (2.9) berechnet, wobei für x der Realteil $\mathrm{Re}(\widehat{\underline{s}})$ und für y der Imaginärteil $\mathrm{Im}(\widehat{\underline{s}})$ einzusetzen ist[14].

[13] Siehe dazu das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*. Auch im Anhang gehen wir kurz auf zwei Additionstheoreme ein.

[14] Diese Vorgangsweise entspricht der am Ende von Abschnitt 6 besprochenen Berechnung der Summe zweier in Polardarstellung gegebener komplexer Zahlen, siehe Summenbildung (6.14) und den Text darunter.

Beispiel: Gegeben seien $\underline{\widehat{g}} = 2\,e^{j\,\pi/4}$ und $\underline{\widehat{h}} = 4\,e^{-j\,\pi/3}$, und es sind die reelle Amplitude $\widehat{s}$ und die Anfangsphase γ der Überlagerung (7.21) bzw. (7.22) zu bestimmen. Mit (7.23) schreiben wir[15]

$$\underline{\widehat{s}} = \underline{\widehat{g}} + \underline{\widehat{h}} = 2\,e^{j\,\pi/4} + 4\,e^{-j\,\pi/3} \tag{7.29}$$

und berechnen mit Hilfe der Eulerschen Formel (3.6)

$$\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,) = 2\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 4\,\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + 2 \approx 3.414 \tag{7.30}$$

sowie

$$\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,) = 2\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 4\,\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3} \approx -2.050\,. \tag{7.31}$$

Daraus erhalten wir (näherungsweise) die gesuchte reelle Amplitude:

$$\widehat{s} = |\,\underline{\widehat{s}}\,| = \sqrt{\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,)^2 + \mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,)^2} \approx 3.982. \tag{7.32}$$

(Man kann die Rechnung natürlich auch mit den exakten Ausdrücken für $\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,)$ und $\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,)$, die $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ enthalten, durchführen, muss sich aber für den nächsten Schritt in jedem Fall über die Vorzeichen von $\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,)$ und $\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,)$ orientieren.) Da $\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,) > 0$ und $\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,) < 0$ ist, liegt $\underline{\widehat{s}}$ im vierten Quadranten. Um die Anfangsphase von $\underline{\widehat{s}}$ zu berechnen, wird entweder Formel (2.8) angewandt:

$$\gamma = \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,)}{\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,)}\right) \approx -0.541 \tag{7.33}$$

oder Formel (2.9):

$$\gamma = \underbrace{\mathrm{sign}(\mathrm{Im}(\,\underline{\widehat{s}}\,))}_{-1}\;\mathrm{acos}\left(\frac{\mathrm{Re}(\,\underline{\widehat{s}}\,)}{|\,\underline{\widehat{s}}\,|}\right) \approx -0.541. \tag{7.34}$$

Damit sind die reelle Amplitude $\widehat{s}$ und die Anfangsphase γ der durch die komplexe Amplitude $\underline{\widehat{s}}$ beschriebenen harmonischen Schwingung bestimmt.

In der Praxis empfiehlt es sich, für derartige Berechnungen die Hilfe eines Computerprogramms in Anspruch zu nehmen, vorzugsweise eines Computeralgebrasystems, in das $\underline{\widehat{s}}$ in der Form $2\,e^{j\,\pi/4} + 4\,e^{-j\,\pi/3}$ eingegeben und die Rechnung mit der gewünschten Genauigkeit durchgezogen werden kann, ohne dass gerundete Zwischenergebnisse abgelesen und neu eingegeben werden müssen.

[15] Das ist das angekündigte Zahlenbeispiel zur Summenbildung (6.14).

Fazit: Der besondere Vorteil der komplexen Methode besteht darin, dass die relevante Information über eine Überlagerung (Summe) von harmonischen Schwingungen gleicher Kreisfrequenz in den komplexen Amplituden steckt, während man sich um den zeitabhängigen Faktor $e^{j\,\omega\,t}$ nicht zu kümmern braucht.

In manchen technischen Bereichen ist die Erleichterung, die die Nutzung komplexer Zahlen bei Modellierung und Berechnung bietet, noch wesentlich eindrucksvoller. Um nur ein Beispiel dafür anzuführen: Bauteile im Wechselstromkreis verursachen auf dynamische Weise Phasenverschiebungen zwischen der an ihnen angelegten elektrischen Spannung und der dadurch hervorgerufenen elektrischen Stromstärke. Werden Spannung und Stromstärke durch komplexe Zahlen dargestellt und ordnet man Spulen und Kondensatoren komplexe Widerstände zu[16], so spart man sich den Umgang mit Differentialgleichungen und kann Schaltungen mit den gleichen Regeln berechnen, die man im Physikunterricht für den Gleichstrom gelernt hat[17], nur eben mit den entsprechenden komplexen Größen – Phasenbeziehungen werden dann automatisch berücksichtigt.

[16] Und zwar $j\,\omega L$ für eine Spule mit Induktivität L und $-\frac{j}{\omega C}$ für einen Kondensator mit Kapazität C, wobei ω die Kreisfrequenz der angelegten Spannung ist. Ein Bauteil, der keine Phasenverschiebung bewirkt, wird durch den bekannten (reellen) Ohmschen Widerstand R beschrieben.

[17] Die Regeln für Parallel- und Serienschaltung und die Kirchhoffschen Regeln.

8 Anhang

Wie versprochen tragen wir nun – skizzenhaft – nach, warum die komplexe Exponentialfunktion durch (3.2) gegeben ist und warum sie die Rechenregel (3.3) erfüllt. Wie im Skriptum *Der Funktionenzoo* kurz erwähnt, kann man viele der in Anwendungen benötigten Funktionen als *Potenzreihen* (*Taylorreihen*) darstellen. Das gilt insbesondere auch für die reelle Exponentialfunktion, die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion. Die entsprechenden Formeln lauten

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{8.1}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \tag{8.2}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots \tag{8.3}$$

Wählt man für x eine beliebige reelle Zahl, setzt sie in eine der obigen Formeln auf der rechten Seite ein und berechnet die Summe bis zu irgendeinem Summanden, so erhält man eine Näherung für den auf der linken Seite angegebenen Funktionswert. Je mehr Summanden aufsummiert werden, umso genauer ist diese Näherung, und in einem gewissen (mathematisch genau definierten) Sinn bekommt man den exakten Funktionwert, wenn alle unendlich vielen Summanden „addiert" werden. Nun fassen wir uns ein Herz und setzen eine *imaginäre* Zahl $z = j\,y$ anstelle von x in (8.1) ein. Dabei benutzen wir, dass die Potenzen von z leicht berechnet werden können[18]: $z^2 = -y^2$, $z^3 = -j\,y^3$, $z^4 = y^4$, $z^5 = j\,y^5$, usw. Es ergibt sich[19]

$$\begin{aligned} e^{j\,y} &= 1 + j\,y - \frac{y^2}{2!} - j\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + j\,\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - j\,\frac{y^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + j\,\frac{y^9}{9!} - \cdots = \\ &= \underbrace{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \ldots}_{\cos(y)} + j\,\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \ldots\right)}_{\sin(y)} = \\ &= \cos(y) + j\,\sin(y). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Voilà! Die Eulersche Formel (3.5)! Von diesem erfreulichen Ergebnis angespornt, legen wir fest, dass e^z für eine allgemeine komplexe Zahl $z = x + j\,y$ ebenfalls durch die Potenzreihe (8.1) dargestellt werden soll, indem z anstelle von x eingesetzt wird. Die nun nötige Berechnung ist etwas schwieriger, sodass wir sie hier nicht vorführen, aber das Ergebnis ist auf jeden Fall mitteilenswert: Es ergibt sich genau die Beziehung (3.2), also

$$e^z = e^x\,\big(\cos(y) + j\,\sin(y)\big). \tag{8.5}$$

Zuletzt werden für zwei beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 die entsprechenden Potenzreihen miteinander multipliziert, woraus sich (wieder nach einer längeren Rechnung, die wir nicht vorführen) genau (3.3) ergibt, also

$$e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{8.6}$$

[18] $j^2 = -1$, $j^3 = j^2 \cdot j = -j$, $j^4 = j^3 \cdot j = -j^2 = 1$, $j^5 = j^4 \cdot j = j$, usw. Allgemein ist j^n gleich 1, j, -1 oder $-j$, je nachdem, ob sich bei der Division $n : 4$ der Rest 0, 1, 2 oder 3 ergibt.

[19] Dabei gehen wir recht sorglos mit den „unendlichen Summen" um, aber diese Umformungen lassen sich mathematisch ganz präzise rechtfertigen!

Man kann auch ein bisschen anders vorgehen und zuerst zeigen, dass die Potenzreihe (8.1), auch wenn für x komplexe Zahlen eingesetzt werden, stets die Multiplikationsregel (8.6) erfüllt. Wird dann wie in (8.4) die Eulersche Formel hergeleitet, so ergibt sich als Folge für jede beliebige komplexe Zahl $z = x + j\,y$ die Beziehung

$$e^z = e^{x+j\,y} \stackrel{(8.6)}{=} e^x\, e^{j\,y} \stackrel{\text{Euler}}{=} e^x \big(\cos(y) + j\,\sin(y)\big), \tag{8.7}$$

also genau (3.2) bzw. (8.5).

Als letzte Demonstration, wie die komplexen Zahlen das Leben erleichtern, leiten wir zwei unmittelbare Folgerungen der Eulerschen Formel und der Multiplikationsregel für Exponentialfunktionen her: Für zwei reelle Zahlen α und β bilden wir $e^{j\,\alpha} = \cos(\alpha) + j\,\sin(\alpha)$ und $e^{j\,\beta} = \cos(\beta) + j\,\sin(\beta)$ und multiplizieren diese beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} e^{j\,\alpha}\, e^{j\,\beta} &= \big(\cos(\alpha) + j\,\sin(\alpha)\big)\big(\cos(\beta) + j\,\sin(\beta)\big) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + j\,\big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Aufgrund der Multiplikationsregel für Exponentialfunktionen ist aber $e^{j\,\alpha}\, e^{j\,\beta} = e^{j\,(\alpha+\beta)}$, und das ist gleich $\cos(\alpha+\beta) + j\,\sin(\alpha+\beta)$. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha+\beta) + j\,\sin(\alpha+\beta) = \\ &\quad = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + j\,\big(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\big). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil ergeben sich die zwei **Additionstheoreme** (**Summensätze**)

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{8.10}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), \tag{8.11}$$

die für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten. Es sind rein reelle Aussagen über die Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion für die Summe zweier Winkel, die man auch (aber mit erheblich größerem Aufwand) mit rein reellen Mitteln beweisen kann. Sie wurden (ohne Begründung) im Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen* erwähnt und können im Zusammenhang mit der Analyse von Schwingungen nützlich sein[20] – daher sollten Sie sie sich merken!

Eine interessante Variante der Begründung der Multiplikationsregel für komplexe Exponentialfunktionen ergibt sich, wenn der Spieß umgedreht und die Additionstheoreme als bekannt vorausgesetzt werden: Ausgehend von der Formel (8.5) für die komplexe Exponentialfunktion kann die Gültigkeit der Multiplikationsregel (8.6) dann leicht mit Hilfe von (8.10) und (8.11) gezeigt werden, und zwar ganz ohne die Verwendung von Potenzreihen. Dazu muss man im Wesentlichen die Schritte, die von (8.5) und (8.6) über (8.8) und (8.9) zu (8.10) und (8.11) geführt haben, in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

[20] So ergibt sich mit ihrer Hilfe, dass $\sin(\omega\,t + \delta) = \cos(\delta)\sin(\omega\,t) + \sin(\delta)\cos(\omega\,t)$ gilt, d.h. dass eine harmonische Schwingung mit beliebiger Anfangsphase δ als eine Überlagerung einer Sinus- und einer Cosinusschwingung dargestellt werden kann, deren Anfangsphasen gleich 0 sind und deren Amplituden von δ abhängen.

9 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Berechnen Sie $\left|(3+4\,j)^2\right|$! Gestalten Sie die Rechnung so einfach wie möglich – vermeiden Sie überflüssige Rechenschritte!

  Lösung:

  $$\left|(3+4\,j)^2\right| \overset{(1.11)}{=} |3+4\,j|^2 \overset{(1.3)}{=} \left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2 = 5^2 = 25.$$

- Berechnen Sie $\left|\dfrac{1+j}{3+4\,j}\right|$! Gestalten Sie die Rechnung so einfach wie möglich – vermeiden Sie überflüssige Rechenschritte!

  Lösung:

  $$\left|\frac{1+j}{3+4\,j}\right| \overset{(1.13)}{=} \frac{|1+j|}{|3+4\,j|} \overset{(1.3)}{=} \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

- Gegeben ist $z = 5\,e^{j\,\pi/3}$. Geben Sie z in Komponentendarstellung an!

  Lösung:

  $$z = 5\,e^{j\,\pi/3} \overset{(3.6)}{=} 5\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} + j\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{5}{2} + j\,\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

- Gegeben ist $z = \dfrac{1+3\,j}{1-2\,j}$. Geben Sie z in Polardarstellung an!

  Lösung:

  $z = -1 + j$, daher $|z| \overset{(1.3)}{=} \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

  z liegt im zweiten Quadranten, daher

  ist der Polarwinkel $\varphi \overset{(2.8)}{=} \underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{-1}\right)}_{-\frac{\pi}{4}} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

  Ergebnis: $z = \sqrt{2}\,e^{3\pi\,j/4}$.

- Geben Sie $3\,e^{2\pi\,j/3}\,(1-j)$ in Komponentendarstellung an!

  Lösung:

$$3\,e^{2\pi\,j/3}\,(1-j) \overset{(3.6)}{=} 3\left(\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}} + j\,\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)(1-j) = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} + j\,\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}\,.$$

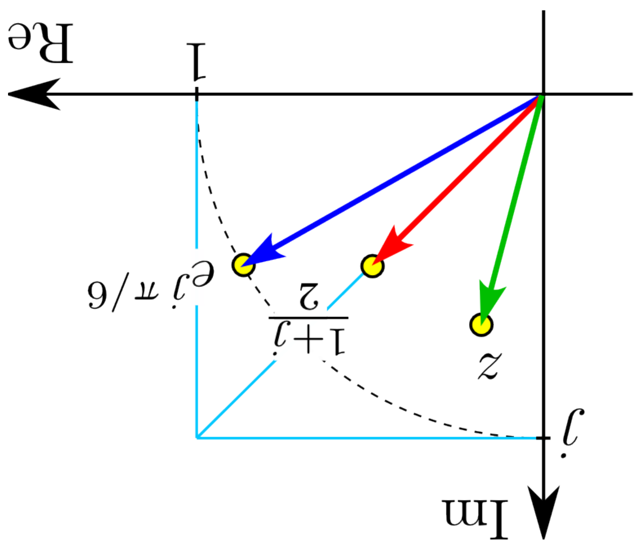
- Gegeben sei $z = 5\,e^{j\,\pi/7}$. Geben Sie $\overline{z}$ und $\frac{1}{z}$ in Polardarstellung an! Gestalten Sie die Rechnung so einfach wie möglich – vermeiden Sie überflüssige Rechenschritte!

  Lösung:

$$\overline{z} \overset{(5.5)}{=} 5\,e^{-j\,\pi/7} \text{ und } \frac{1}{z} \overset{(5.7)}{=} \frac{1}{5}\,e^{-j\,\pi/7}\,.$$

- Geben Sie $\frac{1+j}{2}\,e^{j\,\pi/6}$ in Polardarstellung an! Zeichnen Sie die Faktoren $\frac{1+j}{2}$ und $e^{j\,\pi/6}$ sowie ihr Produkt als Punkte oder Pfeile in der komplexen Ebene!

  Lösung:



$\frac{1+j}{2}$ hat Betrag $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und Polarwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(Letzteres ist auch ohne Rechnung klar! Erkennen Sie, warum?)

Daher $\frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{j\,\pi/4}$ und $\frac{1+j}{2}\,e^{j\,\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{j\,\pi/4}\,e^{j\,\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{5\pi\,j/12}$.

In der Skizze steht z für $\frac{1+j}{2}\,e^{j\,\pi/6}$ oder, gleichbedeutend, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{5\pi\,j/12}$.

Die auftretenden Polarwinkel sind $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$, $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$ und $\frac{5\pi}{12}$ $(75°)$.

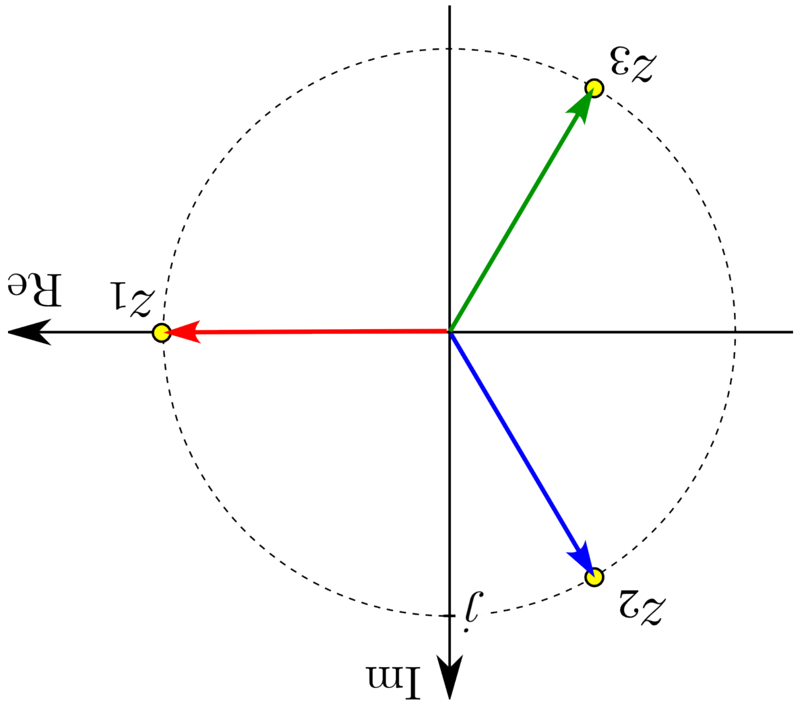
- Mit $z_1 = 2.49\,e^{1.83\,j}$ und $z_2 = 3.56\,e^{0.72\,j}$ berechnen Sie $\mathrm{Re}(z_1 z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 z_2)$, $|z_1 z_2|$ sowie den Polarwinkel von $z_1 z_2$ auf zwei Nachkommastellen genau!

  Lösungen:

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = -7.36$$
$$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = 4.94$$
$$|z_1 z_2| = 8.86$$
Polarwinkel: $\arg(z_1 z_2) = 2.55$

- Zeichnen Sie die Lösungen (6.11)–(6.13) der Gleichung (6.10) für $w = 1$ als Punkte oder Pfeile in der komplexen Ebene!

  Lösung:



- Geben Sie eine komplexe Zahl z an, die die Gleichung $z^4 = j$ erfüllt!

  Lösung:

Die naheliegendste derartige Zahl ist $e^{j\pi/8}$. Ihr Betrag ist 1, ihr Polarwinkel ist $\frac{\pi}{8}$ (22.5°). Es gibt aber noch drei weitere, die gemeinsam mit der ersten ein Quadrat bilden.

- Zwei harmonische Schwingungen werden durch die komplexen Amplituden $\underline{\widehat{g}} = 3\,e^{j\,\pi/2}$ und $\underline{\widehat{h}} = 5\,e^{j\,\pi/4}$ beschrieben. Berechnen Sie näherungsweise die reelle Amplitude $\widehat{s}$ und die Anfangsphase γ der Überlagerung $\underline{\widehat{g}} + \underline{\widehat{h}}$!

  Lösung:

  Die Berechnung verläuft genauso wie im obigen Beispiel, siehe (7.29)–(7.34).
  Es ergibt sich $\widehat{s} \approx 7.431$ und $\gamma \approx 1.075$.

- In diesem Skriptum wurde gezeigt, wie eine harmonische Schwingung als Real- oder Imaginärteil eines Punktes in der komplexen Ebene beschrieben werden kann, der gleichmäßig auf einem Kreis läuft. Eine *andere* Bewegungsform sei durch

$$z(t) = 5\,e^{(-2+3\,j)\,t+4\,j} \tag{9.1}$$

  gegeben. Wie bewegt sich dieser Punkt? Welche Art von Schwingung wird durch den Real- und den Imaginärteil von $z(t)$ dargestellt? Beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten!

  Lösung:

  Wir formen um: $z(t) = 5\,e^{-2t}\,e^{(3t+4)\,j}$.
  Die Phase von $z(t)$ ist gleich $3t+4$. Sie nimmt linear mit der Zeit zu.
  Der zugehörige Zeiger dreht sich gleichmäßig, wie ein Uhrzeiger (aber im Gegenuhrzeigersinn). Der Betrag von $z(t)$ ist gleich $5\,e^{-2t}$, nimmt also exponentiell ab! Der zugehörige Zeiger wird immer kürzer.
  Der Punkt läuft auf einer spiralförmigen Bahn, die dem Ursprung immer näher kommt. Real- und Imaginärteil von $z(t)$ beschreiben gedämpfte Schwingungen.
  Daraus lernen wir, dass auch gedämpfte Schwingungen sehr bequem mit Hilfe komplexer Zahlen beschrieben werden können.

- Zum Abschluss ein bisschen Differentialrechnung: Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von $z(t) = A\,e^{j\,(\omega\,t+\delta)}$ nach der Zeit t! Zeigen Sie, dass $z''(t) = -\omega^2 z(t)$ gilt! Sie können die gleichen Differentiationsregeln verwenden wie im Reellen.

  Lösung:

  Unter Verwendung der Kettenregel findet man $z'(t) = j\,\omega\,A\,e^{j\,(\omega t+\delta)}$
  und $z''(t) = (j\,\omega)^2\,A\,e^{j\,(\omega t+\delta)} = -\omega^2\,A\,e^{j\,(\omega t+\delta)} = -\omega^2 z(t)$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im November 2017 im Rahmen der Kooperation
„Skripten für technische Studiengänge“
(http://www.mathe-online.at/projekte/KooperationFHTWSkripten.html)
von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien
(http://www.technikum-wien.at/). Für Korrekturen danke ich Harald Stockinger.
Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[Kleinere Korrekturen werden laufend vorgenommen. Letzte Änderung: 23.5.2023.]