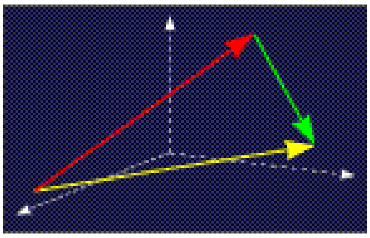
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Bruchterme

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden die Grundlagen des Rechnens mit Bruchtermen beschrieben.

1 Division und Brüche

Früh in der Schule lernen wir, dass die Division die „Umkehrung" der Multiplikation ist. So ist etwa $24 : 8$ die Antwort auf die Frage „8 mal wieviel ist 24?". Danach lernen wir „Bruchzahlen" (also Brüche ganzer Zahlen) wie $\frac{2}{3}$ kennen, und später erfahren wir, dass diese Bruchzahlen rationale Zahlen sind. Das Bruchrechnen ist aber nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sodass wir auch Brüche wie $\frac{\sqrt{2}}{3}$ oder $\frac{5}{\pi^2}$ betrachten können. Gibt es bei diesen letzten beiden Brüchen etwas zu "dividieren", zu "berechnen"? Das ist eine Frage, die die Beziehung zwischen dem Dividieren und den Brüchen betrifft, und die wir zunächst einmal grundsätzlich klären wollen.

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ (wobei a, der **Zähler**, und b, der **Nenner**, für Zahlen stehen und $b \neq 0$ sein soll) ist nur eine andere (in der Mathematik üblicherweise bevorzugte) Art, $a : b$ anzuschreiben:

$$a : b = \frac{a}{b} \,. \tag{1.1}$$

Lesen Sie nun bitte die folgende Formulierung:

> „Sind a und b reelle Zahlen und ist $b \neq 0$, so können wir die Division $\frac{a}{b}$ ausführen, und das Ergebnis ist wieder eine reelle Zahl."

Einverstanden? So einleuchtend und harmlos dieser Satz klingt – er ist nicht unproblematisch! Was genau bedeutet es, „eine Division auszuführen"? Dass hier ein möglicher Stolperstein verborgen liegt, wird sichtbar, wenn wir uns vor Augen halten, dass ein Bruch auf zweierlei Weisen interpretiert werden kann:

- Ein Bruch kann verstanden werden als „Aufforderung, zu dividieren".

- Ein Bruch stellt eine reelle Zahl dar.

In gewisser Weise kann man sagen, dass die Zahl, die ein Bruch darstellt, das *Ergebnis* einer Division ist. Aber Vorsicht! Sehen wir uns einige Beispiele an:

- Der Bruch $\frac{12}{3}$ kann als Aufforderung verstanden werden, 12 durch 3 zu dividieren – das Ergebnis dieser Division ist 4. Wenn wir nun einen Bruch auch als Darstellung einer Zahl akzeptieren, so stellen $\frac{12}{3}$ und 4 die gleiche Zahl dar, und in der Rechnung
$$\frac{12}{3} = 4 \tag{1.2}$$
ist das Gleichheitszeichen *wörtlich* gemeint: $\frac{12}{3}$ und 4 bezeichnen *dieselbe* Zahl (wenngleich die zweite Darstellung vorteilhafter ist). Bitte interpretieren Sie ein Gleichheitszeichen wie das in (1.2) nicht als „und das Ergebnis ist", sondern als „ist gleich" oder als „stellt das Gleiche dar wie"!

- Der Bruch $\frac{12}{5}$ kann ebenfalls als Aufforderung zur Division verstanden werden – aber was ist das Ergebnis? Wir haben zwei Möglichkeiten[1], es anzuschreiben: in der Dezimaldarstellung als 2.4 oder als Bruchzahl $\frac{12}{5}$. Erkennen Sie, was hier vor sich geht? Wenn man $\frac{12}{5}$ als Darstellung einer Zahl ansieht, dann gibt es hier nichts mehr zu „dividieren"! In der Mathematik wird die Darstellung als Bruch oft der Dezimaldarstellung vorgezogen. In diesem Sinn ist der Bruch $\frac{12}{5}$ nicht als Handlungsanweisung („dividiere!"), sondern als Darstellung einer Zahl anzusehen.

- Wie sieht es mit dem Bruch $\frac{12}{9}$ aus? Wir können ihn in der Form
$$\frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3} \tag{1.3}$$
kürzen und haben damit – das Gleichheitszeichen wieder *wörtlich* interpretiert – *drei* Möglichkeiten, das „Ergebnis" darzustellen: als $\frac{12}{9}$ (wobei man berechtigterweise anmerken möchte, dass hier noch gekürzt werden kann), als Bruchzahl $\frac{4}{3}$ oder in der Dezimaldarstellung als $1.333\ldots$ (was aber nur dann eine exakte Angabe ist, wenn dazu gesagt oder in irgendeiner Weise kenntlich gemacht wird, dass die Ziffernfolge nie abbricht).

- Den Bruch $\frac{\pi}{2}$ als „Aufforderung, zu dividieren"anzusehen, kann kontraproduktiv sein, denn wie sollte diese Division aussehen? Ihr „Ergebnis" in der Form 1.5707963 oder $1.5707963\ldots$ anzugeben, ist nicht exakt, und zudem wird dabei verschleiert, woher diese Zahl kommt. Bitte akzeptieren Sie, dass die Form $\frac{\pi}{2}$ die einfachste und klarste Art ist, dieses „Ergebnis" anzugeben – was de facto bedeutet, den Bruch nicht als „Aufforderung, zu dividieren" aufzufassen, sondern einfach als Darstellung einer bestimmten reellen Zahl. Sollte nicht aus irgendeinem speziellen Grund ein numerischer Näherungswert von $\frac{\pi}{2}$ gefragt sein, so gibt es hier nichts zu „dividieren"!

Behalten Sie bitte immer im Auge, dass ein Bruch eine reelle Zahl darstellt und dass „das Dividieren" in der Form, wie wir es in der Schule gelernt haben, lediglich in manchen Fällen dazu dient, die Darstellungsform zu vereinfachen!

[1] Eine dritte Möglichkeit, diese Zahl in der Form $2\frac{2}{5}$ im Sinn von „zwei + zwei Fünftel" anzugeben, ist in der Mathematik eher unüblich, da das Fehlen eines Operationszeichens gewöhnlich als Multiplikation gedeutet wird und damit $2\frac{2}{5}$ auch als „zwei mal zwei Fünftel" verstanden werden könnte.

2 Bruchrechnen mit Zahlen

Was bedeutet $2 \cdot \frac{3}{5}$? Wir können es uns vorstellen als „das Doppelte von $\frac{3}{5}$" oder als „drei Fünftel von 2". Diese Zahl kann auf verschiedene Arten angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 3}{5} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}\,, \tag{2.1}$$

und schließlich kann auch ihre Dezimaldarstellung 1.2 angegeben werden. Alle unterschiedlichen Formen in (2.1) sind dadurch charakterisiert, dass die Faktoren 2 und 3 „oben" stehen, also zum Zähler gehören, auch wenn sie nicht unbedingt oberhalb eines Bruchstrichs stehen. Stellen Sie sich 2 einfach als $\frac{2}{1}$ vor – jetzt steht die 2 oberhalb eines Bruchstrichs! Beachten Sie weiters, dass das „von" in der Formulierung „drei Fünftel von 2" auch als „mal" verstanden werden kann: „Drei Fünftel von 2" ist das gleiche wie „drei Fünftel mal 2":

$$\text{„drei Fünftel von } 2\text{“} = \frac{3}{5} \cdot 2. \tag{2.2}$$

Was bedeutet $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$? Wir können es uns vorstellen als „die Hälfte von $\frac{3}{5}$" oder als „drei Fünftel von $\frac{1}{2}$". Auch hier kann das „von" als „mal" gelesen werden, und auch diese Zahl kann auf verschiedene Arten angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2 \cdot 5} = 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot 3 = \frac{3}{10} = \frac{1}{10} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{10}\,, \tag{2.3}$$

und ihre Dezimaldarstellung ist 0.3. Alle unterschiedlichen Formen in (2.3) sind dadurch charakterisiert, dass die Faktoren 2 und 5 „unten" stehen, also zu einem Nenner gehören – gleichgültig, ob nun ein Bruchstrich verwendet wird oder zwei.

Und schließlich kann auch ein Produkt wie $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$ in verschiedenen Formen angeschrieben werden, die alle das Gleiche bedeuten:

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35} = 2 \cdot \frac{3}{7 \cdot 5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 3}{7} = \ldots\,, \tag{2.4}$$

wobei es noch viele weitere Möglichkeiten gibt, die wir nicht alle hinschreiben. Hier stehen 2 und 3 immer „oben", während 5 und 7 immer „unten" stehen. Die Dezimaldarstellung dieser Zahl bricht nicht ab, näherungsweise ist sie durch 0.1714 gegeben.

Diese Beispiele geben die Regeln an, wie Brüche miteinander und mit Zahlen, die nicht als Brüche angeschrieben sind, multipliziert werden. Lassen Sie die „Muster", die durch (2.1) – (2.4) ausgedrückt werden, auf sich wirken! Sie werden sie bei der Umformung von Brüchen benötigen!

Wir kommen nun zur Addition von Brüchen. „2 Siebentel $+\,3$ Siebentel ist gleich 5 Siebentel",

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}\,. \tag{2.5}$$

Ein „Siebentel", symbolisch dargestellt durch die Zahl 7 im Nenner, kann hier genauso als Objekt aufgefasst werden wie ein Apfel in „2 Äpfel $+\,3$ Äpfel ist gleich 5 Äpfel". Das durch

(2.5) ausgedrückte „Muster" gibt an, wie Brüche mit gleichem Nenner addiert werden. Analog funktioniert die Subtraktion

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}\,. \tag{2.6}$$

Was passiert, wenn wir die größere von der kleineren Zahl abziehen? Ganz einfach:

$$\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7}\,. \tag{2.7}$$

Die Formen $\frac{-3}{7}$ und $-\frac{3}{7}$ stellen die gleiche Zahl dar, nämlich die „Gegenzahl"[2] von $\frac{3}{7}$. Das ergibt sich mit dem durch (2.1) ausgedrückten „Muster", wenn wir es auch für negative Zahlen anwenden:

$$\frac{-3}{7}=\frac{(-1)\cdot 3}{7}=(-1)\cdot\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\,. \tag{2.8}$$

Und wenn eine negative Zahl im Nenner eines Bruchs steht? Mit $\frac{-1}{-1}=1$ und dem durch (2.3) ausgedrückten „Muster" ergibt sich

$$\frac{3}{-7}=\frac{-1}{-1}\cdot\frac{3}{-7}=(-1)\cdot\frac{3}{(-1)\cdot(-7)}=(-1)\cdot\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\,. \tag{2.9}$$

Ein Faktor -1, gleichgültig, ob er im Zähler oder im Nenner steht, kann also als Minuszeichen vor den Bruch gezogen werden. Bitte merken Sie sich:

$$\frac{-3}{7}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}\,. \tag{2.10}$$

Bei der Addition oder Subtraktion von Brüchen mit *verschiedenen* Nennern müssen die Brüche zuerst „auf gleichen Nenner" gebracht werden. Dies geschieht in der Regel durch „Erweitern". Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit der gleichen (von 0 verschiedenen) Zahl multipliziert werden. Beispielsweise kann der Bruch $\frac{5}{9}$ mit 4 erweitert werden:

$$\frac{5}{9}=\frac{5\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{20}{36}\,. \tag{2.11}$$

Die genaue Argumentation, die in der Praxis natürlich nicht so ausführlich angeschrieben wird, sieht so aus:

$$\frac{5}{9}=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{4}=\frac{5\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{20}{36}\,, \tag{2.12}$$

wobei also zunächst $\frac{4}{4}$, was ja gleich 1 ist, eingefügt und danach das durch (2.4) dargestellte „Muster" benutzt wurde. Berechnen wir nun also die Summe zweier Brüche mit unterschiedlichen Nennern, etwa

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{12}\,. \tag{2.13}$$

Was könnte der gleiche Nenner sein? Die sparsamste Möglichkeit besteht darin, den ersten Bruch mit 4 und den zweiten mit 3 zu erweitern, sodass sich als gleicher Nenner 36 ergibt:

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{12}=\frac{5\cdot 4}{9\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{20}{36}+\frac{21}{36}=\frac{41}{36}\,. \tag{2.14}$$

Wieso aber ist das die sparsamste Möglichkeit der Erweiterung? Im Rahmen der ganzen Zahlen ist 36 das „kleinste gemeinsame Vielfache" der ursprünglichen Nenner 9 und 12. Das erkennen wir an der Zerlegung der beiden Nenner in Primzahlen:

[2] Für jede reelle Zahl $x\neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre „Gegenzahl".

- $9 = 3 \cdot 3$
- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Ein Faktor 3 ist beiden gemeinsam. Auf ein möglichst kleines gemeinsames Vielfaches fehlt der 9 ein Faktor $2 \cdot 2$, also 4, und der 12 fehlt ein Faktor 3:

- $9 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$
- $12 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Eine ungeschicktere (aber ebenfalls korrekte) Berechnung von (2.13) besteht darin, jeden Bruch mit dem Nenner des anderen zu erweitern, sodass als gleicher Nenner das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner (also $9 \cdot 12 = 108$) entsteht:

$$\frac{5}{9} + \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 12}{9 \cdot 12} + \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{60}{108} + \frac{63}{108} = \frac{123}{108}\,. \tag{2.15}$$

Wird nun noch bemerkt, dass 123 und 108 beide durch 3 teilbar sind, ergibt sich durch Kürzen mit $\frac{41}{36}$ das gleiche Resultat wie in (2.14).

Nun bleibt noch die Division von Brüchen zu besprechen. Dazu bemerken wir, dass der Kehrwert[3] von 3 gleich $\frac{1}{3}$ ist und der Kehrwert von $\frac{1}{3}$ gleich 3 ist. Da eine Division durch eine Zahl als Multiplikation mit ihrem Kehrwert angesehen werden kann, gilt: Eine Division durch $\frac{1}{3}$ ist das Gleiche wie eine Multiplikation mit 3. Hier ein Beispiel:

$$\frac{7}{\frac{1}{3}} = 7 \cdot 3 = 21. \tag{2.16}$$

In analoger Weise bemerken wir, dass der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ gleich $\frac{3}{2}$ ist (und umgekehrt), denn es gilt ja $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$. Eine Division durch $\frac{2}{3}$ ist daher das Gleiche wie eine Multiplikation mit $\frac{3}{2}$. Ein Beispiel:

$$\frac{7}{\frac{2}{3}} = 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}\,. \tag{2.17}$$

Statt der Zahl 7 im vorigen Beispiel können wir ebenfalls einen Bruch nehmen:

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}\,. \tag{2.18}$$

Dieses „Muster“ zur Berechnung eines *Doppelbruchs* wird manchmal in der Form „Produkt der Außenglieder durch Produkt der Innenglieder“ eingelernt, aber für das Verstehen günstiger ist es, sich vor Augen zu halten, dass die Division durch einen Bruch das Gleiche ist wie die Multiplikation mit seinem Kehrwert.

[3] Ist $x \neq 0$, so bezeichnen wir $\frac{1}{x}$ als Kehrwert von x.

3 Bruchrechnen mit Termen

Sollen Bruchterme multipliziert, addiert, subtrahiert und dividiert werden, so müssen wir genau genommen nur die „Muster“, die im vorigen Abschnitt aufgetreten sind, benutzen, denn Terme stehen ja für nichts anderes als für Zahlen, die sich ergeben, wenn anstelle der Variablen (der „Platzhalter“) Zahlen eingesetzt werden. Aus diesen „Mustern“ ergeben sich einige allgemeine **Regeln der Bruchrechnung**, die wir nun zusammenstellen. Dabei setzen wir voraus, dass die Werte der Variablen stets so gewählt sind, dass im Nenner nie 0 steht. Wie in der Termrechnung üblich, schreiben wir den „Malpunkt“ nur zwischen Zahlen an, ansonsten lassen wir ihn weg.

- **Produkt zweier Bruchterme**:
$$\frac{a}{b}\,\frac{x}{y}=\frac{a\,x}{b\,y}\,. \tag{3.1}$$
In dieser knapp ausgedrückten Regel stehen a, b, x und y für beliebige Terme. So gilt beispielsweise
$$\frac{z^3+w-1}{4\,u+w}\,\frac{z+2}{z\,u}=\frac{(z^3+w-1)\,(z+2)}{(4\,u+w)\,z\,u}\,. \tag{3.2}$$
Als Spezialfall der Regel (3.1) mit $b=1$ ergibt sich
$$a\,\frac{x}{y}=\frac{a\,x}{y}\,. \tag{3.3}$$
Ein Faktor (hier a) kann also in den Zähler geschrieben werden (und auch wenn man das nicht tut, sollte man ihn sich als dem Zähler zugehörig vorstellen).

  Das **Kürzen** und das **Erweitern** eines Bruchs ergibt sich als Spezialfall von (3.1) für $a=b$:
$$\frac{a\,x}{a\,y}=\frac{x}{y}\,. \tag{3.4}$$
Gekürzt wird, indem ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner (hier a) weggelassen wird. Das wird im Zug einer Rechnung meist in der Form
$$\frac{\cancel{a}\,x}{\cancel{a}\,y}=\frac{x}{y} \tag{3.5}$$
gekennzeichnet. Erweitert wird, indem Zähler und Nenner den gleichen zusätzlichen Faktor a bekommen. Kürzen und erweitern beruhen beide auf der Tatsache, dass $\frac{a}{a}=1$ ist.

  > Hinweis zur Vermeidung von Fehlern: Bitte beachten Sie, dass nur ein gemeinsamer *Faktor* von Zähler und Nenner gekürzt werden kann! Eine Rechnung wie
  $$\frac{a\,x+1}{a\,x-1}=\frac{\cancel{a}\,x+1}{\cancel{a}\,x-1}=\frac{x+1}{x-1} \tag{3.6}$$

ist **falsch**, da hier a *kein Faktor* von Zähler und Nenner ist! Eine korrekte Kürzung hingegen ist beispielsweise beim folgenden Bruchterm möglich (und wird hier *ganz* ausführlich angeschrieben):

$$\frac{a\,y+2\,a}{a\,y-2\,a}=\frac{a\,(y+2)}{a\,(y-2)}=\underbrace{\frac{a}{a}}_{=1}\,\frac{y+2}{y-2}=\frac{y+2}{y-2}\,. \tag{3.7}$$

Um Brüche effizient kürzen zu können, sollten Sie versuchen, Zähler und Nenner auf mögliche gemeinsame Faktoren, die nicht auf den ersten Blick ersichtlich sind, zu untersuchen! Hier ein Beispiel:

$$\frac{4\,p^2-q^2}{p\,q\,(2\,p-q)}=\frac{(2\,p+q)\,(2\,p-q)}{p\,q\,(2\,p-q)}=\frac{2\,p+q}{p\,q}\,. \tag{3.8}$$

Hier wurde im Zähler eine binomische Formel angewandt, um $4\,p^2-q^2$ in ein Produkt zu zerlegen.

- **Division zweier Bruchterme** (**Doppelbruch**):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}=\frac{a}{b}\,\frac{y}{x}=\frac{a\,y}{b\,x}\,, \tag{3.9}$$

wobei a, b, x und y für beliebige Terme stehen. Als Spezialfall mit $b=1$ ergibt sich daraus

$$\frac{a}{\frac{x}{y}}=a\,\frac{y}{x}=\frac{a\,y}{x}\,. \tag{3.10}$$

Als Spezialfall von (3.9) mit $y=1$ ergibt sich

$$\frac{\frac{a}{b}}{x}=\frac{a}{b}\,\frac{1}{x}=\frac{a}{b\,x}\,. \tag{3.11}$$

Die Regeln (3.9) und (3.10) beruhen auf der Tatsache, dass die Division durch $\frac{x}{y}$ das Gleiche ist wie die Multiplikation mit $\frac{y}{x}$. Die Regel (3.11) beruht auf der Tatsache, dass die Division durch x das Gleiche ist wie die Multiplikation mit $\frac{1}{x}$.

- **Regeln für den Umgang mit dem Minuszeichen**:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b} \tag{3.12}$$

und

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}\,. \tag{3.13}$$

- **Summe von Brüchen mit gleichem Nenner**:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\frac{x+y}{a}\,. \tag{3.14}$$

Ersetzen wir y durch $-y$, so ergibt sich

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=\frac{x-y}{a}\,. \tag{3.15}$$

- **Summe von Brüchen mit verschiedenen Nennern**: Die einzige wirklich *allgemeine* Regel, die wir zur Berechnung einer Summe von Brüchen mit verschiedenen Nennern angeben können, lautet

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{x\,b}{a\,b}+\frac{y\,a}{b\,a}=\frac{x\,b+y\,a}{a\,b}\,. \tag{3.16}$$

Hier wurden die Brüche so erweitert, dass der entstehende gleiche Nenner das Produkt $a\,b$ der beiden ursprünglichen Nenner ist. In konkreten Fällen kann es jedoch, analog zum obigen Beispiel (2.14), „sparsamere" Formen geben, die Brüche auf einen gleichen Nenner zu bringen. Ein Beispiel:

$$\frac{2\,x+1}{x\,(x+3)}+\frac{1-x}{(x-2)\,(x+3)}=\frac{(2\,x+1)\,(x-2)}{x\,(x+3)\,(x-2)}+\frac{(1-x)\,x}{(x-2)\,(x+3)\,x}\,. \tag{3.17}$$

Hier muss der erste Bruch nur mit $x-2$ und der zweite nur mit x erweitert werden, um einen gleichen Nenner zu erzielen. Wir schreiben ihn einheitlich als $x\,(x-2)\,(x+3)$ und rechnen weiter:

$$(3.17)=\frac{(2\,x+1)\,(x-2)+(1-x)\,x}{x\,(x-2)\,(x+3)}=\frac{x^2-2\,x-2}{x\,(x-2)\,(x+3)}\,, \tag{3.18}$$

wobei nur der Zähler durch Ausmultiplizieren der Klammern vereinfacht wurde. So können wir das Ergebnis stehen lassen. Es gibt keinen Grund, den Nenner ebenfalls auszumultiplizieren!

Um Brüche effizient addieren zu können, sollten Sie versuchen, die auftretenden Nenner auf mögliche gemeinsame Faktoren, die nicht auf den ersten Blick ersichtlich sind, zu untersuchen! Hier zwei Beispiele:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x^2+2\,x}-\frac{2\,x}{x+2}&=\frac{3}{x\,(x+2)}-\frac{2\,x}{x+2}=\\&=\frac{3}{x\,(x+2)}-\frac{2\,x^2}{x\,(x+2)}=\frac{3-2\,x^2}{x\,(x+2)}\end{aligned} \tag{3.19}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+2\,a+1}+\frac{1}{a+1}&=\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{1}{a+1}=\\&=\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{a+1}{(a+1)^2}=\frac{a+a+1}{(a+1)^2}=\frac{2\,a+1}{(a+1)^2}\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

In (3.19) wurde im ersten Nenner x herausgehoben, in (3.20) wurde eine binomische Formel verwendet, um $a^2+2\,a+1$ als Quadrat zu schreiben.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch eine Regel an, die das Bilden von Potenzen betrifft:

- **Potenz eines Bruchs**:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}\,. \tag{3.21}$$
Diese Regel gilt zunächst, wenn a und b beide $\neq 0$ sind, für beliebige ganze Zahlen k und darüber hinaus, sofern a und b positiv sind, auch für beliebige rationale k. Als Spezialfall für $k = \frac{1}{2}$ ergibt sich
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,. \tag{3.22}$$

Schließlich noch eine Empfehlung: Vermeiden Sie, wenn möglich, allzu lange Bruchstriche! So können Sie beispielsweise den Term

$$\frac{5\,x^3 + 3\,x\,y + y^2 + a\,x - 7}{2} \tag{3.23}$$

auch einfacher in der Form

$$\frac{1}{2}\,\left(5\,x^3 + 3\,x\,y + y^2 + a\,x - 7\right) \tag{3.24}$$

anschreiben. (Erinnern wir uns: Division durch 2 ist das Gleiche wie Multiplikation mit $\frac{1}{2}$!)

Ausgerüstet mit diesen Regeln sollten Sie in der Lage sein, Terme, die in beliebiger Weise durch die Grundrechnungsarten (einschließlich des Dividierens, also des Bildens von Brüchen) und das Wurzelziehen kombiniert werden, zu berechnen bzw. zu vereinfachen.

4 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Berechnen Sie:
$$\frac{c-1}{2\,x\,b}\;\frac{x^2\,b^3}{(c-1)^2} =$$

  Lösung:

  $$\frac{x\,b^2}{2\,(c-1)}$$

- Vereinfachen Sie:
$$\frac{s^2 - 7\,s}{s\,(s-7)} =$$

  Lösung:

  $$1$$

- Berechnen Sie, indem Sie auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=$$

Lösung:

$$\frac{x+a}{x^2}$$

- Berechnen Sie, indem Sie auf gleichen Nenner bringen:

$$\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}=$$

Lösung:

$\frac{2\,u}{(u+1)\,(u-1)}$, was das Gleiche ist wie $\frac{2\,u}{u^2-1}$

- Berechnen Sie:

$$\frac{3\,a}{a^2-y^2}-\frac{2}{a-y}=$$

Lösung:

$$\frac{a-2\,y}{a^2-y^2}$$

- Etwas knifflig, aber trotzdem machbar:

$$\frac{\frac{1}{h}+\frac{1}{h-1}}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h-1}}=$$

Lösung:

$$1-2\,h$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.