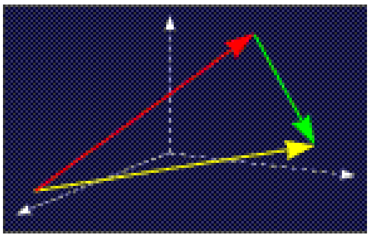

Identitäten

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden einige einfache Identitäten für den Alltagsgebrauch vorgestellt. Die wichtigsten sind die elementaren Rechenregeln, die der Umformung von Termen dienen, und die binomischen Formeln.

1 Identitäten, Rechengesetze und Umformungsregeln

Die Grenze zwischen „Rechengesetzen" („Rechenregeln") und anderen „Identitäten" ist unscharf. Im Kern bezeichnen beide Begriffe das Gleiche: die Aussage, dass zwei Terme, die verschieden aussehen, die gleichen Zahlenwerte haben, wenn alle Symbole, die in ihnen vorkommen, durch Zahlen ersetzt werden. Als Rechengesetze bezeichnet man aber sinnvollerweise die *elementaren* und *einfachen* unter ihnen, aus denen sich in weiterer Folge auch die komplizierteren ergeben. Wir listen zunächst die elementaren auf: Neben den Kommutativgesetzen für die Addition und die Multiplikation

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ a\,b &= b\,a \end{aligned} \tag{1.1}$$

und den Assoziativgesetzen für die Addition und die Multiplikation

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= (a+b)+c \\ a\,(b\,c) &= (a\,b)\,c \end{aligned} \tag{1.2}$$

wären hier noch die Regeln im Umgang mit 0 und 1

$$\begin{aligned} a+0 &= a \\ 0\cdot a &= 0 \\ 1\cdot a &= a, \end{aligned} \tag{1.3}$$

die Regeln im Umgang mit negativen Zahlen[1]

$$\begin{aligned}(-1)\,a &= -a\\ -(-a) &= a\\ (-a)\,b = a\,(-b) &= -a\,b\\ (-a)(-b) &= a\,b,\end{aligned}\tag{1.4}$$

die Regeln für das Dividieren

$$\begin{aligned}\tfrac{a}{1} &= a\\ \tfrac{b}{b} &= 1\\ \tfrac{a}{b}\cdot c &= \tfrac{a\,c}{b}\\ \tfrac{a}{b}\cdot\tfrac{c}{d} &= \tfrac{a\,c}{b\,d}\\ \tfrac{-a}{b} = \tfrac{a}{-b} &= -\tfrac{a}{b}\\ \tfrac{1}{\frac{b}{f}} &= \tfrac{f}{b}\end{aligned}\tag{1.5}$$

(für $b, f \neq 0$) und das Distributivgesetz[2]

$$\begin{aligned}a\,(b+c) &= a\,b + a\,c\\ (a+b)\,c &= a\,c + b\,c\end{aligned}\tag{1.6}$$

zu nennen. Letzteres gilt auch für mehr als zwei Summanden in der Klammer, also etwa

$$a\,(b+c+d+f+g) = a\,b + a\,c + a\,d + a\,f + a\,g.\tag{1.7}$$

Für den Fall $a = -1$ ergibt sich die Regel, dass ein „Minus" vor einer Klammer zu einer Umkehr aller Vorzeichen führt, also beispielsweise

$$-\,(b-c+d) = -b + c - d.\tag{1.8}$$

Alle bisher hingeschriebenen Regeln[3] sind Identitäten. Wir werden sie im Folgenden benutzen, um weitere Identitäten zu gewinnen, d.h. wir verwenden sie als **Regeln für die Umformung von Termen**. Beachten Sie, dass Sie alle diese Regeln (sowie auch alle folgenden Identitäten) ebenso in „umgekehrter Reihenfolge" lesen können, also beispielsweise die erste von (1.6) in der Form

$$a\,b + a\,c = a\,(b+c).\tag{1.9}$$

[1] Beachten Sie, dass $-a$ nicht notwendigerweise für eine negative Zahl steht. Für $a = -5$ ist beispielsweise $-a = 5$.

[2] Aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation sagen beide Identitäten in (1.6) das Gleiche aus. Das Distributivgesetz regelt das „Klammern ausmultiplizieren".

[3] Sie sind nicht alle voneinander unabhängig – manche lassen sich aus anderen folgern. Die Zusammenstellung umfasst jene Regeln, die Sie sicher und schnell, ohne großartiges Nachdenken, wann immer es nötig ist, anwenden können sollten.

Diese Art, einen Term umzuformen, kann man als „Herausheben eines gemeinsamen Faktors aus einer Summe“ bezeichnen. Halten Sie sich bitte beim Umgang mit Klammern vor Augen, dass es manchmal nützlich ist, eine Klammer auszumultiplizieren (wie in (1.6)), während es in anderen Fällen günstiger ist, durch Herausheben eines Faktors eine Klammer zu „erzeugen“ (wie in (1.9)). Welche Umformungen in einem konkreten Fall die geeigneten sind, hängt davon ab, was man mit dem betreffenden Term vorhat. Oft geht es schlicht und einfach darum, einen etwas längeren und unübersichtlichen Ausdruck zu vereinfachen, sodass man ihm seine Struktur besser ansieht. Da kann es schon mal nötig sein, ein paar Umformungsschritte auszuprobieren und, falls sie nicht zu einer Vereinfachung führen, zu verwerfen.

2 Binomische Formeln

Die (drei) binomischen Formeln gehören zu den berühmtesten Identitäten. Sie lauten

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \tag{2.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 \tag{2.2}$$

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2 \tag{2.3}$$

und sollten Ihnen jederzeit locker aus der Feder fließen!

Der **Beweis** erfolgt einfach durch Ausmultiplizieren der Klammern nach dem zuvor beschriebenen Rezept, jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer zu multiplizieren, dabei die Vorzeichen entsprechend zu berücksichtigen und alle diese Produkte zu addieren:

- Erste binomische Formel: $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + a\,b + b\,a + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$.
- Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - a\,b - b\,a + b^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$.
- Dritte binomische Formel: $(a+b)\,(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - a\,b + b\,a - b^2 = a^2 - b^2$.

Hier eine Anwendung:

$$(2\,x+3)^2 = 4\,x^2 + 12\,x + 9. \tag{2.4}$$

Alles klar? (Falls nicht: Verwenden Sie (2.1) für $a = 2\,x$ und $b = 3$ und rechnen Sie Schritt für Schritt: $(2\,x+3)^2 = (2\,x)^2 + 2 \cdot 2\,x \cdot 3 + 3^2 = 4\,x^2 + 12\,x + 9$.)

Die binomischen Formeln können nicht nur zum Ausmultiplizieren von Klammern verwendet werden, sondern – umgekehrt – auch dazu, einen Term zu **faktorisieren**, d.h. als Produkt anzuschreiben. Haben Sie beispielsweise den Term

$$y^2 - 2\,y + 1 \tag{2.5}$$

vor sich, so sollten Sie erkennen, dass er sich mit Hilfe der zweiten binomischen Formel als Quadrat schreiben lässt:

$$y^2 - 2\,y + 1 = (y-1)^2. \tag{2.6}$$

So etwas lässt sich nicht mit jedem Term machen! Beispielsweise mit $y^2 - 2\,y + 2$ geht es nicht. Um zu erkennen, ob sich ein komplizierterer Term mit Hilfe der binomischen Formeln als Produkt schreiben lässt oder nicht, ist ein bisschen Übung und auch etwas Fingerspitzengefühl nötig.

3 Höhere Potenzen von $a + b$

Die binomische Formel (2.1) gibt das Quadrat einer Summe in ausmultiplizierter Form an. Manchmal werden höhere Potenzen einer Summe benötigt. Durch Ausmultiplizieren der Klammern finden wir

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 \tag{3.1}$$

und

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4\,, \tag{3.2}$$

und wir könnten mit entsprechend wachsendem Aufwand noch einige weitere Potenzen der Form $(a+b)^n$ für $n = 5, 6, 7$ usw. ausmultiplizieren.

Um ganz allgemein die ausmultiplizierte Form einer Potenz von $a + b$ mit natürlichem Exponenten zu ermitteln, gibt es eine einfachere Methode. Von ihr handelt der *binomische Lehrsatz*, der in einem eigenen Skriptum behandelt wird.

4 Höhere Potenzen von $a - b$

Um $(a-b)^3$ oder $(a-b)^4$ in ausmultiplizierter Form zu erhalten, müssen wir nicht zum Start zurückkehren und die Klammern ausmultiplizieren wie zuvor. Stattdessen können wir in (3.1) oder (3.2) die Variable b einfach durch $-b$ ersetzen. Erinnern wir uns: Die Buchstaben a und b sind ja Platzhalter für reelle Zahlen. Da (3.1) und (3.2) Identitäten sind, also für *alle* reellen Zahlen a und b gelten, bleiben sie auch richtig, wenn a und b durch andere Terme ersetzt werden. Wird b durch $-b$ ersetzt, so wird b^2 durch $(-b)^2$ ersetzt, was aber gleich b^2 ist. b^3 wird durch $(-b)^3$ ersetzt, was gleich $-b^3$ ist. Allgemein fällt das Minuszeichen bei Potenzen von b mit geradem Exponenten weg, während es für Potenzen von b mit ungeradem Exponenten bestehen bleibt. Auf diese Weise finden wir

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3 \tag{4.1}$$

und

$$(a-b)^4 = a^4 - 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 - 4\,a\,b^3 + b^4\,. \tag{4.2}$$

Wir sehen, dass sich die Vorzeichen der Vorfaktoren abwechseln (man sagt: sie „alternieren“), und das gilt auch für höhere Potenzen von $a - b$.

5 Einige weitere Identitäten

Jede Termumformung erzeugt eine Identität. Identitäten können in allen mathematischen Anwendungsbereichen auftreten, und in jedem mathematischen Gebiet, in dem neue Strukturen eingeführt werden (beispielsweise Logarithmen oder Winkelfunktionen), treten neue Identitäten auf, die von diesen Strukturen handeln. Beispiele für einfache Identitäten, die mit Hilfe der binomischen Formeln leicht nachgerechnet werden können, sind

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\,(a^2 + b^2) \tag{5.1}$$

und

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,a\,b. \tag{5.2}$$

Eine besonders interessante Identität ist

$$(1-x)\,(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}. \tag{5.3}$$

Sie gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Beispielsweise für $n = 7$ lautet sie

$$(1-x)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7) = 1-x^8. \tag{5.4}$$

Rechnen Sie zur Übung zuerst (5.4) nach und versuchen Sie danach, (5.3) ganz allgemein zu beweisen! Ist $x \neq 1$, so kann aus (5.3) geschlossen werden, dass

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{5.5}$$

gilt. Das folgt einfach aus der Definition des Dividierens: Gilt $a\,b = c$ und ist $a \neq 0$, so gilt $b = \frac{c}{a}$. Wenden wir das auf $a = 1-x$, $b = 1+x+x^2+\cdots+x^n$ und $c = 1-x^{n+1}$ an, so folgt (5.5) sofort aus (5.3). Dieses Ergebnis kann benutzt werden, um Summen vom Typ $1+x+x^2+\cdots+x^n$ mit vielen Summanden zu berechnen, ohne die Summanden einzeln addieren zu müssen, also etwa

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = \frac{1-2^8}{1-2} = 2^8-1 = 256-1 = 255. \tag{5.6}$$

Wie Sie sehen, gibt es Identitäten ganz unterschiedlicher Art.

Auch hinter so manchem „Zahlentrick“ steckt eine Identität, der eine einfache Termumformung zugrunde liegt. Vielleicht kennen Sie diesen: Um die Zahl 45 zu quadrieren, nehmen wir die Zehnerstelle, also 4, und multiplizieren sie mit der um 1 erhöhten Zahl, also 5. An das Ergebnis $4 \cdot 5 = 20$ hängen wir die Ziffern 25 und erhalten 2025, was genau 45^2 ist! Das klappt mit jeder zweistelligen Zahl, deren Einerstelle 5 ist. Der Grund dafür ist einfach: Eine zweistellige Zahl mit Zehnerstelle m und Einerstelle 5 kann in der Form $10\,m+5$ geschrieben werden. Ihr Quadrat ergibt sich mit der ersten binomischen Formel zu

$$(10\,m+5)^2 = 100\,m^2 + 100\,m + 25, \tag{5.7}$$

was wir auch – durch Herausheben von $100\,m$ aus der Summe der ersten beiden Summanden – in der Form

$$100\,m\,(m+1) + 25 \tag{5.8}$$

schreiben können. Das Rezept zum Quadrieren unserer Zahl lautet also: Es wird $m\,(m+1)$ berechnet, mit 100 multipliziert (wodurch an der Einer- und Zehnerstelle Nullen entstehen) und 25 addiert – was genau dem Trick entspricht (der hiermit bewiesen ist)! Er ist nichts anderes aus eine Anwendung der Identität

$$(10\,m+5)^2 = 100\,m\,(m+1) + 25. \tag{5.9}$$

Damit beschließen wir unseren Einstieg in die Welt der Identitäten. Einen wichtigen, hier nicht behandelten Typ stellen Identitäten dar, in denen Brüche (d.h. Divisionen) eine entscheidende Rolle spielen. Ihnen ist ein eigenes Skriptum gewidmet.

6 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Multiplizieren Sie die Klammer aus: $(3\,p + z^3)^2 =$
  Lösung:
  $$9\,p^2 + 6\,p\,z^3 + z^6$$
- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(2\,a + b)^2 - (2\,a - b)^2 - (a - 2\,b)^2 + (a + 2\,b)^2 =$
  Lösung:
  $$16\,a\,b$$
- Multiplizieren Sie die Klammern aus: $(3\,t^4 + 4\,s^3)\,(3\,t^4 - 4\,s^3) =$
  Lösung:
  $$9\,t^8 - 16\,s^6$$
- Versuchen Sie, den Term $4\,u^4 - 4\,u^2\,v + v^2$ mit Hilfe einer der binomischen Formeln als Quadrat zu schreiben!
  Lösung:
  $$(2\,u^2 - v)^2$$
- Versuchen Sie, den Term $16\,w^4 - q^2$ mit Hilfe einer der binomischen Formeln als Produkt zu schreiben!
  Lösung:
  $$(4\,w^2 + q)\,(4\,w^2 - q)$$
- Eine etwas schwierigere Aufgabe: Multiplizieren Sie die Klammern aus:
  $((x + y)^2 + y^2)\,((x - y)^2 + y^2) =$
  Lösung:
  $$x^4 + 4\,y^4$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.