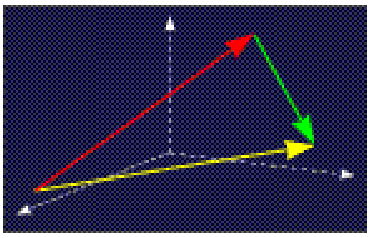
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Polynome

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum gibt einen ersten Überblick über Polynome und stellt allerlei Wissenswertes über diese wichtigen mathematischen Objekte zusammen. Obwohl manche der vorgestellten Eigenschaften von Polynomen mit den hier zur Verfügung stehenden Methoden nicht gebührend begründet werden können, stellt ihre Kenntnis eine gute Vorbereitung auf spätere mathematische Stoffgebiete dar.

1 Was sind Polynome?

Ein Polynom (genauer: ein Polynom in *einer* Variable, die wir meistens x nennen) ist eine Summe von Termen, die ihrerseits jeweils Produkte einer Zahl mit einer Potenz x^n (mit $n \in \mathbb{N}$) sind. Ein Beispiel:

$$7\,x^4 - 2\,x^3 + 5\,x^2 - 12\,x + 9. \tag{1.1}$$

Die einzelnen Summanden (hier $7\,x^4$, $-2\,x^3$, $5\,x^2$, $-12\,x$ und 9) werden als **Glieder** des Polynoms bezeichnet. Die Zahlen, die vor den Potenzen stehen, heißen **Koeffizienten** oder **Vorfaktoren**. Im obigen Beispiel ist der Koeffizient von x^4 gleich 7 und jener von x^3 gleich -2. Der letzte Summand, 9, wird auch das *konstante Glied* genannt und kann als Koeffizient von x^0 (was ja gleich 1 ist) angesehen werden. Einzelne Koeffizienten können auch 0 sein. Das ist beispielsweise beim Polynom $3\,x^3 - 4\,x + 5$ der Fall, das wir auch in der Form $3\,x^3 + 0 \cdot x^2 - 4\,x + 5$ lesen können: Hier verschwindet der Koeffizient von x^2.

Die Ausdrücke $2\,x + \dfrac{5}{x} + 8$ und $7\,x^2 - 5\sqrt{x}$, die wir auch in der Form $2\,x + 5\,x^{-1} + 8$ und $7\,x^2 - 5\,x^{1/2}$ anschreiben können, sind *keine* Polynome, da nicht alle vorkommenden Exponenten von x aus $\mathbb{N}$ sind.

Polynome können auch in anderen Schreibweisen angegeben werden. Ein Beispiel ist

$$x\,(x+3), \tag{1.2}$$

was nach Ausmultiplizieren der Klammer die Form $x^2 + 3\,x$ annimmt. Ob es sinnvoll ist, ein als Produkt gegebenes Polynom auszumultiplizieren, hängt davon ab, was man mit ihm tun möchte.

Der höchste auftretende Exponent wird **Grad** (manchmal auch **Ordnung**) des Polynoms genannt. (1.1) ist ein Polynom vom Grad 4 (ein Polynom vierten Grades). Ein Polynom vom Grad 1 (ein Polynom ersten Grades) wird auch *lineares*[1] Polynom genannt, ein Polynom vom Grad 2 (ein Polynom zweiten Grades) wird auch *quadratisches* Polynom genannt, und ein Polynom vom Grad 3 (ein Polynom dritten Grades) können wir auch als *kubisches* Polynom bezeichnen. Ein Polynom, das nur aus einem einzigen Glied besteht, wie beispielsweise $3\,x^5$, heißt *Monom*. Ein Polynom, das aus zwei Gliedern besteht, wie beispielsweise $3\,x^5 - 7\,x^2$, heißt *Binom* (ein Wort, von dem sich die Bezeichnungen *binomische Formel* und *binomischer Lehrsatz* ableiten). Ein Polynom, das nur aus einem konstanten Glied $\neq 0$ besteht, das also genau genommen nur eine Zahl ist, kann man auch als Polynom *nullten* Grades bezeichnen, um auszudrücken, dass diese Zahl als Polynom aufgefasst wird[2].

Ein Polynom, dessen Koeffizienten reelle Zahlen sind und dessen Variable ein Platzhalter für reelle Zahlen ist, kann – wenn man es ganz genau ausdrücken will – als *reelles* Polynom oder „Polynom über $\mathbb{R}$“ bezeichnet werden[3].

Für manche allgemeinen Überlegungen müssen wir Polynome betrachten, deren Koeffizienten nicht konkret festgelegt sind. So ist beispielsweise jedes Polynom zweiten Grades von der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c, \tag{1.3}$$

wobei a, b und c Platzhalter für seine Koeffizienten sind. In diesem Ausdruck kommen zwar vier verschiedene Buchstaben vor (a, b, c und x), aber sie dienen unterschiedlichen Zwecken. a, b und c stellen die Koeffizienten dar (auf deren konkrete Werte man sich nicht festlegen möchte, die aber als fix festgehalten gedacht und daher auch als **Konstanten** bezeichnet werden). Der Buchstabe x steht ebenfalls für konkrete Zahlenwerte, auf die man sich nicht festlegen möchte, aber diese Zahlenwerte stellt man sich am besten als *variabel* vor, was der Grund dafür ist, dass x als **Variable** des Polynoms bezeichnet wird[4]. Oft werden die Koeffizienten entsprechend den Exponenten der Potenzen, zu denen sie gehören, durchnummeriert. So kann ein allgemeines Polynom zweiten Grades auch in der Form

$$a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \tag{1.4}$$

[1] In manchen Texten wird mit dem Wort *linear* nur ein Polynom ersten Grades bezeichnet, dessen konstantes Glied gleich 0 ist. Siehe auch Fußnote 2.

[2] Manchmal werden konstante Polynome ebenfalls zu den *linearen* gezählt. Leider wird das Wort „linear“ in unterschiedlichen Bedeutungen gebraucht. Siehe dazu auch Fußnote 1. Das „Nullpolynom“, das nur aus dem konstanten Glied 0 besteht, kann – aus Gründen, die hier nicht wichtig sind – als Polynom vom Grad „minus unendlich“ angesehen werden.

[3] Man kann auch Polynome mit anderen mathematischen Objekten bilden, etwa mit komplexen Zahlen oder mit Matrizen.

[4] Dieser Unterschied zwischen a, b und c als Konstanten und x als Variable ist hier noch ein bisschen unscharf. Er wird präzisiert, wenn Polynome als *Funktionen* aufgefasst werden, was wir in diesem Skriptum aber nicht tun.

angeschrieben werden, wobei nun die Symbole a_2, a_1 und a_0 die Koeffizienten darstellen.

Oft (aber nicht immer) ist es sinnvoll, die Glieder eines Polynoms in abfallender Reihenfolge der Exponenten zu ordnen, wie wir es bei den bisherigen Beispielen gemacht haben. Man könnte aber, da die Addition reeller Zahlen kommutativ ist, (1.1) genausogut in der Form

$$9 - 12\,x + 5\,x^2 - 2\,x^3 + 7\,x^4 \tag{1.5}$$

oder mit irgendeiner anderen Reihenfolge der Summanden anschreiben.

Wir haben bisher nur Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten angeschrieben. Man sollte aber im Auge behalten, dass Polynome beliebige reelle Zahlen als Koeffizienten haben können. Beispielsweise ist

$$-\frac{2}{7}\,x^4 + \sqrt{3}\,x^3 - \frac{\pi^2+5}{4}\,x^2 - 12\,x + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{1.6}$$

ein Polynom wie jedes andere!

Die Variable eines Polynoms mit dem Buchstaben x zu bezeichnen, ist eine weit verbreitete Angewohnheit (und insofern bequem, als sich das Auge nach einiger Zeit daran gewöhnt, unter „x" automatisch eine Variable zu sehen), aber keineswegs verpflichtend[5]. So ist

$$s^2 - 2\,s + 1 \tag{1.7}$$

ein Polynom (zweiten Grades) in der Variable s.

In konkreten Anwendungssituationen stellen die Variablen von Polynomen Größen dar, die im betreffenden Gebiet eine Rolle spielen, und werden mit den dort üblichen Symbolen bezeichnet. Um ein Beispiel anzuführen: Der Anhalteweg beim Autofahren (d.h. die – in Meter gemessene – Strecke, die das Fahrzeug vom Zeitpunkt des Erkennens einer „normalen" Situation, die ein Bremsen erfordert, bis zum Stillstand zurücklegt) wird mit der Faustformel

$$\text{Anhalteweg in normaler Situation} = \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \tag{1.8}$$

berechnet[6], wobei v die in $\mathrm{km/h}$ angegebene Geschwindigkeit (zum Zeitpunkt des Erkennens der Gefahr) ist. Das ist ein Polynom zweiten Grades in der Variable v. Der Koeffizient von v^2 ist $\frac{1}{100}$, jener von v ist $\frac{3}{10}$, und das konstante Glied ist gleich 0. So ergibt sich etwa für eine Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km/h}$ (also $v = 60$) der Anhalteweg (in Meter) zu

$$\frac{60^2}{100} + \frac{3\cdot 60}{10} = 54. \tag{1.9}$$

Formel (1.8) kann dazu benutzt werden, um den im Autoverkehr einzuhaltenden Mindestabstand zu berechnen. Handelt es sich um eine „Gefahrenbremsung", bei der besonders hart auf das Bremspedal gedrückt wird, wird die modifizierte Formel

$$\text{Anhalteweg in Gefahrensituation} = \frac{v^2}{200} + \frac{3\,v}{10} \tag{1.10}$$

[5] Generell neigt man dazu, Variablen mit Buchstaben am Ende des Alphabets zu bezeichnen, Konstanten mit Buchstaben vom Anfang des Alphabets.

[6] Der lineare Term $\frac{3\,v}{10}$ gibt den Reaktionsweg an, der quadratische Term $\frac{v^2}{100}$ den Bremsweg.

verwendet. Für eine gegebene Geschwindigkeit v ist (1.10) stets kleiner als (1.8).

Ein letztes Anwendungsbeispiel: Wird ein Gegenstand aus der Höhe h_0 mit Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen, so beträgt seine Höhe nach der Zeit t

$$-\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\,t + h_0\,, \tag{1.11}$$

wobei $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist[7]. Dieser Term kann als Polynom zweiten Grades in der Variable t aufgefasst werden. Die Koeffizienten sind hier nicht als konkrete Zahlen gegeben, sondern durch die Konstanten g, v_0 und h_0 ausgedrückt[8]. Diese Formel kann etwa dazu benutzt werden, um zu berechnen, wann der Gegenstand seine größte Höhe erreicht und welchen Wert diese hat. Mit $v_0 = 0$ und $h_0 = 0$ (wobei letzteres einfach bedeutet, dem Anfangsort die Höhe 0 zuzuweisen) ergibt sich das *Fallgesetz* von Galileo Galilei, das Sie wahrscheinlich aus dem Physikunterricht kennen.

2 Polynome multiplizieren

Viele Terme, mit denen wir es in der Mathematik zu tun haben, sind Polynome. Ein schöner Zug an der Gesamtheit aller Polynome besteht darin, dass wir sie mit Zahlen multiplizieren (d.h. Vielfache bilden), zueinander addieren, voneinander subtrahieren und miteinander multiplizieren können und dabei stets wieder Polynome erhalten. Insbesondere die Multiplikation von Polynomen ist interessant: Der Grad des Produkts zweier Polynome ist die *Summe* der Grade der beiden Polynome. So ist das Produkt eines Polynoms vom Grad 2 mit einem Polynom vom Grad 3 ein Polynom vom Grad 5. Beispiel:

$$\big(x^2 + 3\,x - 1\big)\,\big(4\,x^3 - 2\,x^2 + x - 5\big) = 4\,x^5 + \ldots\,, \tag{2.1}$$

wobei die Punkte für weitere Glieder stehen, deren Exponenten aber alle kleiner als 5 sind. Ist Ihnen klar, warum das so ist? ($4\,x^5$ kommt zustande, indem in beiden Klammern jeweils das Glied mit dem größten Exponenten gewählt wird – kein anderes Produkt eines Glieds der ersten Klammer mit einem Glied der zweiten Klammer kann diesen Exponenten überbieten.) Wenn wir (2.1) ausmultiplizieren, so erhalten wir den vollständigen Ausdruck

$$\big(x^2 + 3\,x - 1\big)\,\big(4\,x^3 - 2\,x^2 + x - 5\big) = 4\,x^5 + 10\,x^4 - 9\,x^3 - 16\,x + 5. \tag{2.2}$$

Auch das Bilden einer Potenz eines Polynoms mit einer natürlichen Zahl als Exponenten (was ja nur ein Spezialfall des Multiplizierens ist) führt wieder auf ein Polynom. So berechnen wir mit Hilfe der binomischen Formeln

$$(3\,x + 4)^2 = 9\,x^2 + 24\,x + 16 \tag{2.3}$$

und

$$(3\,x - 4)^2 = 9\,x^2 - 24\,x + 16. \tag{2.4}$$

[7] Luftwiderstand und Luftauftrieb sind hier vernachlässigt.

[8] Der Index $_0$ an den Symbolen v_0 und h_0 bezieht sich auf die Geschwindigkeit und die Höhe zum Anfangszeitpunkt, also zur Zeit $t = 0$.

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes[9] können wir Potenzen wie $(3\,x-4)^5$ berechnen, und fleißiges Ausmultiplizieren von Klammern erlaubt es uns, auch Ungetümen wie $(7\,x^4-2\,x^3+5\,x^2-12\,x+9)^3$ zu Leibe zu rücken.

3 Polynome faktorisieren

Es ist aber nicht immer sinnvoll, Produkte von Polynomen auszumultiplizieren, denn die Faktoren eines Polynoms zeigen uns manche seiner Eigenschaften in recht direkter Form. So ist beispielsweise klar, dass das Polynom

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) \tag{3.1}$$

den Wert 0 annimmt, wenn $x=5$ gesetzt wird. Dann ist nämlich $x-5=0$, und das Produkt von 0 mit einer anderen Zahl ist wieder 0. Der ausmultiplizierten Form, die sich nach einer kurzen Rechnung zu

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7)=x^3-2\,x^2-8\,x-35 \tag{3.2}$$

ergibt, sieht man das nicht mehr auf den ersten Blick an! Der Faktor $x-5$ des Polynoms (3.1) ist für sich genommen ein lineares Polynom (ein Polynom ersten Grades) und heißt daher **Linearfaktor**. Ein Polynom wie

$$(x-3)\,(4\,x+7) \tag{3.3}$$

ist von vornherein als Produkt von Linearfaktoren gegeben. Aus dieser Form gehen viele seiner Eigenschaften hervor, ohne dass wir es ausmultiplizieren müssen (beispielsweise, dass es den Wert 0 annimmt, wenn $x=3$ oder $x=-\frac{7}{4}$ gesetzt wird).

Aus Gründen wie diesen möchte man manchmal von einem gegebenen Polynom mit einem Grad ≥ 2 wissen, ob es als Produkt von Polynomen niedrigeren Grades geschrieben werden kann. Im Rahmen der reellen Zahlen (auf die wir uns hier beschränken) ist das manchmal möglich und manchmal nicht[10]. Hier einige Beispiele:

- Wir multiplizieren (3.3) aus,

  $$(x-3)\,(4\,x+7)=4\,x^2-5\,x-21, \tag{3.4}$$

  und finden daher im Umkehrschluss, indem wir diese Beziehung „verkehrt herum“ in der Form

  $$4\,x^2-5\,x-21=(x-3)\,(4\,x+7) \tag{3.5}$$

  lesen, dass das Polynom $4\,x^2-5\,x-21$ in der Form $(x-3)\,(4\,x+7)$, also als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann.

[9] Siehe dazu das Skriptum *Der binomische Lehrsatz und die Binomialkoeffizienten*.

[10] Im Rahmen der komplexen Zahlen ist es *immer* möglich. Das garantiert ein berühmter Satz von Carl Friedrich Gauß.

- Das Polynom $x^2 + 3\,x - 1$ lässt sich ebenfalls als Produkt von Linearfaktoren schreiben, aber um diese zu finden, muss man eine Gleichung lösen, was hier nicht das Thema ist[11].
- Indem wir (3.2) „verkehrt herum“ lesen, schließen wir, dass das Polynom $x^3 - 2\,x^2 - 8\,x - 35$ in der Form $(x-5)\,(x^2 + 3\,x + 7)$ als Produkt geschrieben werden kann.
- Der zweite Faktor des vorigen Beispiels, $x^2 + 3\,x + 7$, lässt sich hingegen (im Rahmen der reellen Zahlen) *nicht* weiter in ein Produkt zerlegen[12]. Um das einzusehen, müsste man quadratische Gleichungen lösen können, was wir hier nicht voraussetzen.
- Auch das Polynom $x^2 + 1$ kann nicht in ein Produkt zerlegt werden. Das ist (im Unterschied zum vorigen Beispiel) relativ leicht einzusehen: Wäre $x^2 + 1$ ein Produkt, so wäre es ein Produkt von Linearfaktoren, hätte also die Form $(x+a)\,(x+b)$. Für $x = -a$ und $x = -b$ müsste sein Wert gleich 0 sein. Aber $x^2 + 1$ kann nicht den Wert 0 annehmen, da es ein Quadrat (das immer ≥ 0 ist) plus 1 ist, also nie kleiner als 1 sein kann.
- Zwei letzte Beispiele: Mit ein bisschen Gefühl für die binomischen Formeln kann man erkennen, dass das Polynom $4\,x^2 - 4\,x + 1$ als $(2\,x-1)^2$ geschrieben werden kann, also das Produkt von $2\,x - 1$ mit sich selbst ist. Und mit einer anderen binomischen Formel kann $9\,x^2 - 16$ in der Form $(3\,x+4)\,(3\,x-4)$ als Produkt geschrieben werden.

Diesen umgekehrten Vorgang, ein Polynom als Produkt zu schreiben, nennen wir **Faktorisierung**. Polynome zu faktorisieren, ist eine schwierigere Aufgabe als das Ausmultiplizieren von Klammern. Wir gehen hier nicht weiter auf dieses Problem ein, sondern bitten Sie, sich zu merken:

- Wenn man auf ein Produkt von Polynomen stößt, muss man es nicht gleich ausmultiplizieren. Ausmultiplizieren ist nur angebracht, wenn es einen Grund dafür gibt.
- Festzustellen, ob ein gegebenes Polynom faktorisiert werden kann (und, falls ja, seine Faktoren zu finden), ist zwar oft wünschenswert, aber nicht immer leicht. Für manche Polynome zweiten Grades können die Faktoren unter Ausnutzung der binomischen Formeln gefunden werden. Ganz allgemein werden Sie von Polynomen zweiten Grades feststellen können, ob sie sich faktorisieren lassen (und, falls ja, ihre Faktoren finden), sobald sie in der Lage sind, quadratische Gleichungen zu lösen.

[11] Aber für den Fall, dass es Sie interessiert, sei das Ergebnis verraten: Es gilt $x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$.

[12] Vieleicht ist Ihnen aufgefallen, dass wir über die Faktoren von Polynomen so sprechen wie über die Primfaktoren natürlicher Zahlen. Tatsächlich kann man beweisen, dass die Faktoren eines Polynoms bis auf multiplikative Konstanten *eindeutig* sind. Das Faktorisieren eines Polynoms kann man daher als „Zerlegung“ betrachten, ähnlich wie die Zahl 60 in der Form $60 = 6 \cdot 10 = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Schritt für Schritt in Primfaktoren „zerlegt“ werden kann. Das garantiert, dass etwa das Polynom $4\,x^2 - 5\,x - 21$ keine andere Faktorisierung als die in (3.5) angegebene besitzt (ausgenommen solche, die lediglich durch das Herumschieben multiplikativer Konstanten gewonnen werden wie $4\,(x-3)\,(x+\frac{7}{4})$, was aus $(x-3)\,(4\,x+7)$ durch Herausheben von 4 aus der zweiten Klammer entsteht).

4 Polynome dividieren

Polynome können nicht nur multipliziert, sondern – ähnlich wie Zahlen – auch dividiert werden. Erinnern wir uns, was eine Division ist: Der Quotient $12 : 5$, was wir lieber als Bruchzahl $\frac{12}{5}$ schreiben, ist die Antwort auf die Frage „Wieviel mal 5 ist 12?“. Analog ist der Bruchterm

$$\frac{3\,x^2 + x - 7}{2\,x + 1} \tag{4.1}$$

die Antwort auf die Frage „Welcher Term mal $2\,x + 1$ ist $3\,x^2 + x - 7$?“. Der Quotient zweier Polynome ist in den meisten Fällen allerdings *kein* Polynom. Manchmal aber doch:

$$\frac{4\,x^2 - 5\,x - 21}{x - 3} = 4\,x + 7. \tag{4.2}$$

Woher wissen wir das? Blicken Sie auf die Identität (3.4)! Mit ihrer Hilfe können wir berechnen

$$\frac{4\,x^2 - 5\,x - 21}{x - 3} = \frac{(x-3)\,(4\,x+7)}{x - 3} = 4\,x + 7, \tag{4.3}$$

wobei wir den Bruchterm durch $x - 3$ gekürzt haben[13]! Das Faktorisieren von Polynomen ist also bei der Berechnung ihrer Quotienten hilfreich, ähnlich wie die Kürzung des Bruchs $\frac{21}{7} = \frac{3\cdot 7}{3} = 7$ auf der Zerlegung der Zahl 21 in ein Produkt beruht.

Beachten Sie aber: Diese Methode klappt nicht immer! So lässt sich der Quotient (4.1) nicht in analoger Weise wie (4.3) kürzen, da Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Ein bisschen entspricht das der Situation, dass die Bruchzahl $\frac{25}{7}$ nicht gekürzt werden kann, da 25 und 7 keinen gemeinsamen (Prim-)Faktor, also keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die Division $25 : 7$ lässt sich aber „teilweise“ ausführen, wenn der „Rest“ berücksichtigt wird: Schon früh in der Schule rechnen wir $25 : 7$ „ist gleich 3 mit Rest 4“, was nichts anderes aussagt als $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$. Etwas Analoges kann man auch mit Polynomen machen. So lässt sich beispielsweise (4.1) in der Form

$$\frac{3\,x^2 + x - 7}{2\,x + 1} = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{4} - \frac{27}{4\,(2\,x + 1)} \tag{4.4}$$

schreiben. Wenn wir das mit

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} \tag{4.5}$$

vergleichen, spielt das Polynom $\frac{3}{2}\,x - \frac{1}{4}$ die Rolle des Divisionsergebnisses „ohne Rest“ und $-\frac{27}{4}$ die Rolle des „Rests“. Wir gehen nicht darauf ein, wie man die Form (4.4) finden kann (die Kunst, das zu tun, heißt *Polynomdivision*[14]), sondern merken uns, dass der Quotient zweier Polynome in den meisten Fällen kein Polynom ist, aber manchmal – wenn der „Rest“ Null ist, wie es etwa bei (4.2) der Fall ist – schon. Ganz wie bei der Division ganzer Zahlen!

[13] Genau genommen müsste man jetzt dazusagen, dass (4.3) nur dann gilt, wenn $x \neq 3$ ist, denn für $x = 3$ stünde hier eine Division durch 0.

[14] Die Polynomdivision wurde früher angewandt, um bestimmte Berechnungen zu vereinfachen. Seitdem Computerprogramme uns bei der Lösung mathematischer Probleme helfen, wird sie als nicht mehr so wichtig erachtet und ist mittlerweile aus den meisten Mathematik-Lehrplänen der Schulen verschwunden.

5 Die Werte von Polynomen

Wir haben bereits gesehen, dass ein Polynom für gewisse Werte der Variable gleich 0 sein kann. In vielen mathematischen Anwendungen, in denen Polynome auftreten, möchte man sich grob darüber orientieren, welche Zahlenwerte ein Polynom annehmen kann, wenn die Variable alle möglichen Werte durchläuft. Hier einige Regeln, die dabei helfen:

- Wie verhält sich ein Polynom, wenn seine Variable einen *sehr großen* Wert annimmt? Betrachten wir als Beispiel das Polynom

$$2\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 3. \tag{5.1}$$

Setzen wir x gleich einer Million, so ist sein Wert gleich

$$2 \cdot 1000000^3 + 7 \cdot 1000000^2 - 5 \cdot 1000000 + 3 = 2000006999995000003. \tag{5.2}$$

Erkennen Sie, was hier passiert? Der erste Summand, $2\cdot 1000000^3$, also $2\cdot 10^{18}$, ist um ein Vielfaches größer als alle anderen Summanden zusammen. Letztere betragen weniger als ein Tausendstel Prozent dieses ersten Summanden! Wird x etwa auf eine Milliarde vergrößert, so wird die dominante Rolle dieses ersten Summanden noch ausgeprägter. Das Verhalten unseres Polynoms (5.1) für große x wird daher fast ausschließlich von seinem *führenden Glied* $2\,x^3$ bestimmt, d.h. vom Summanden mit dem größten Exponenten. In diesem Sinn können wir schreiben

$$2\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 3 \approx 2\,x^3 \quad \text{für } \textit{sehr große } x. \tag{5.3}$$

Diese Regel gilt für beliebige Polynome, unabhängig von den Zahlenwerten ihrer Koeffizienten: Für genügend große Werte der Variable wird der Wert eines Polynoms von seinem führenden Glied dominiert.

- Wie verhält sich das Polynom (5.1), wenn x negativ ist und sein Betrag *sehr groß* ist, also wenn etwa x gleich minus einer Million gesetzt wird? Die Antwort: Auch in diesem Fall wird der Zahlenwert vom führenden Glied dominiert. Konkret ergibt sich aus (5.1) mit $x = -1000000$ der Wert

$$-\,2 \cdot 1000000^3 + 7 \cdot 1000000^2 + 5 \cdot 1000000 + 3 = -1999992999994999997. \tag{5.4}$$

Auch hier sind alle anderen Summanden im Vergleich zum ersten praktisch vernachlässigbar. Wir können daher (5.3) verallgemeinern zu:

$$2\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 3 \approx 2\,x^3 \quad \text{falls } |x| \textit{ sehr groß } \text{ist}. \tag{5.5}$$

Auch diese Regel gilt für beliebige Polynome, unabhängig von den Zahlenwerten ihrer Koeffizienten: Ist der Betrag der Variable genügend groß, so wird der Wert des Polynoms von seinem führenden Glied dominiert[15].

[15] Der Grund, warum wir hier mit dem *Betrag* argumentieren, liegt in unserer Sprache: $x = 1000000$ können wir als „sehr groß“ bezeichnen. Aber wie kann $x = -1000000$ charakterisiert werden? Die Bezeichnung „sehr klein“, die mathematisch im Sinne von „sehr weit links auf der Zahlengeraden“ korrekt wäre, könnte missverstanden werden, denn „sehr klein“ im üblichen Sinn wäre eher $x = 0.000001$. Um $x = -1000000$ zu charakterisieren, sagen wir daher, dass $x < 0$ und sein Betrag $|x| = 1000000$ sehr groß ist.

- Ein Polynom, dessen Grad eine *ungerade* Zahl ist, kann immer positive und negative Werte annehmen. Das ergibt sich unmittelbar aus dem bisher Gesagten. Betrachten wir wieder (5.1), ein Polynom dritten Grades, als Beispiel. Ist x sehr groß, so wird sein Wert vom führenden Glied $2\,x^3$ dominiert und ist daher positiv. Ist $x < 0$ und $|x|$ sehr groß, so wird sein Wert ebenfalls vom führenden Glied $2\,x^3$ dominiert und ist daher negativ.
- Aus dem Vorigen ergibt sich ein wichtiger Sachverhalt: Ein Polynom, dessen Grad eine *ungerade* Zahl ist, nimmt zumindest für *einen* Variablenwert den Wert 0 an. Der genaue Beweis dieser Eigenschaft ist nicht ganz leicht, aber die Grundidee ist einfach: Wird die Variable x auf der Zahlengeraden von einem Wert, für den das Polynom negativ ist, zu einem Wert, für den es positiv ist, „bewegt", so gibt es irgendwo ein x, bei dem der Wert des Polynoms von einem negativen zu einem positiven „umschlägt", und dort ist er gleich 0.
- Von einem Polynom, dessen Grad eine *gerade* Zahl ist, kann von vornherein nicht so einfach gesagt werden, welche Vorzeichen seine Werte annehmen können. Beispiele:
  - $x^2 + 1$ kann nur positive Werte annehmen.
  - $-x^2 - 1$ kann nur negative Werte annehmen.
  - $x^2 - 1$ kann Werte beiderlei Vorzeichens annehmen. Für $x = 0$ ist dieses Polynom negativ, für $x = 2$ ist es positiv.

  Wir können aber über ein Polynom, dessen Grad eine gerade Zahl ist, sagen, dass es entweder *nach unten beschränkt* ist (d.h. dass es eine untere Grenze für die Werte gibt, die es annehmen kann) oder *nach oben beschränkt* ist (d.h. dass es eine obere Grenze für die Werte gibt, die es annehmen kann). Der erste Fall tritt ein, wenn der Koeffizient des führenden Glieds positiv ist, der zweite Fall tritt ein, wenn dieser Koeffizient negativ ist. So gilt beispielsweise, dass die Werte des Polynoms $-3\,x^4 + 7\,x^3 + 2\,x^2 + 9$ nicht beliebig groß werden können, gleichgültig, wie x gewählt wird. Der genaue Beweis dieser Eigenschaft ist nicht ganz leicht, sodass wir hier darauf verzichten. Mit einer grafischen Methode, die später im Stoff kommt, kann diese Eigenschaft aber leicht nachvollzogen werden.

Um Genaueres über die möglichen Werte, die ein Polynom annehmen kann, herauszufinden, gibt es eine Reihe von Methoden, die sich nach und nach mit dem Fortschreiten des Mathematikstoffs ergeben. Ihre Anwendung ist mit dem Lösen von Gleichungen verbunden und setzt für Polynome vom Grad ≥ 3 Kenntnisse in der Differentialrechnung voraus.

6 Verallgemeinerung: Polynome in mehreren Variablen

Bisher haben wir Polynome in *einer* Variable betrachtet. Die Mathematik kennt auch Polynome in *mehreren* Variablen. So ist etwa

$$4\,x^3\,y - 2\,x^2\,y^3 + 5\,x\,y^2 + 2\,x - 3\,y^2 + 1 \tag{6.1}$$

ein Polynom in den Variablen x und y.

Ob ein Term, in dem mehrere Variable in „polynomialer“ Art vorkommen, als Polynom (und, wenn ja, in welchen Variablen) aufgefasst werden soll, ist nicht von vornherein vorgegeben, sondern kommt darauf an, was man mit ihm machen möchte. Betrachten wir etwa folgende Situation: Ein Gebäude hat die Form eines Würfels mit Seitenlänge a, auf dessen Deckfläche eine Pyramide der Höhe h gesetzt ist. Der gesamte Volumsinhalt des Gebäudes ist durch

$$V = a^3 + \frac{1}{3}\,a^2\,h \tag{6.2}$$

gegeben. Wir sind frei, diesen Term

- als Polynom in der Variable a (mit Koeffizienten 1 und $\frac{1}{3}\,h$),
- als Polynom in der Variable h (mit Koeffizienten a^3 und $\frac{1}{3}\,a^2$)
- oder als Polynom in den zwei Variablen a und h (mit Koeffizienten 1 und $\frac{1}{3}$)

zu interpretieren. Für manche Aufgabenstellungen macht das keinen Unterschied, sodass man sich nicht wirklich für eine dieser Möglichkeiten entscheiden muss. Bietet ein Architekt aber mehrere derartige Gebäude an, wobei in jedem Einzelfall die Länge a durch die Größe des Grundstücks vorgegeben ist, die Höhe h aber disponibel ist und mit dem Auftraggeber ausverhandelt werden kann, so wird er a eher als „Konstante“ (wenngleich in jedem Fall mit einem anderen Wert) und h eher als „Variable“ behandeln und bei der Planung der Klimaanlagen (deren Kosten er proportional zum Volumsinhalt veranschlagt) den Term (6.2) als Polynom in der Variable h auffassen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.