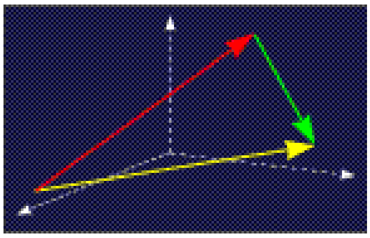
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Winkelfunktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum behandelt die Definitionen, Graphen und wichtigsten Eigenschaften der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens.

1 Das Bogenmaß

Um anzugeben, „wie weit geöffnet" (oder „wie groß") ein Winkel ist, wird im Alltagsleben und in den ersten Jahren des Mathematikunterrichts das **Gradmaß** verwendet, in dem ein voller Winkel $360°$ beträgt, ein gestreckter Winkel $180°$ und ein rechter Winkel $90°$. Ein gleichseitiges Dreieck besitzt drei (gleiche) Innenwinkel von $60°$, und die beiden kleineren (nicht-rechten) Winkel Ihres Geodreiecks betragen $45°$. Wird aus einem Kreis durch gerade Schnitte vom Mittelpunkt zum Rand ein Sektor abgetrennt, so können wir einen Winkel auch als relativen Anteil des vollen Kreises ausdrücken: Einem Viertelkreis entspricht ein rechter Winkel, also $90°$, einem Drittel einer Torte entspricht ein Winkel von $120°$ (das ist auch der Winkel zwischen den Zacken des „Mercedes-Sterns"), und drei Viertel einer Pizza entsprechen einem Winkel von $270°$. Für genaue Winkelangaben, und um sehr kleine Winkel durch ganze Zahlen ausdrücken zu können, wird $1°$ in $60'$ (60 Minuten oder Winkelminuten, auch Bogenminuten) und $1'$ in $60''$ (60 Sekunden oder Winkelsekunden, auch Bogensekunden) unterteilt[1] – ein Brauch, der aber zusehends durch Gradangaben im Dezimalsystem verdrängt wird.

Dass der volle Winkel mit $360°$ veranschlagt wird, ist eine *Konvention*, die lange zurückliegende historische Gründe hat und aufgrund der Tatsache, dass 360 ohne Rest durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40 und 45 geteilt werden kann, recht praktisch ist. Es wurden (und werden) aber auch andere Winkelmaße verwendet. So konnte sich das im Zuge der „Metrifizierung" Ende des 18. Jahrhunderts eingeführte **Neugradsystem**, in dem der volle Winkel

[1] Wir wollen uns nicht lange mit der Umrechnung zwischen diesem Grad-Minuten-Sekunden-System und der Gradangabe im Dezimalsystem aufhalten. Hier nur ein Beispiel: $20°13'27'' = (20 + \frac{13}{60} + \frac{27}{3600})° \approx 20.22417°$.

in $400\,\mathrm{gon}$ unterteilt wird[2], der rechte Winkel also $100\,\mathrm{gon}$ beträgt, im Vermessungswesen etablieren.

Für manche mathematischen Zwecke – vor allem, wenn Winkelfunktionen, das Thema dieses Skriptums, ins Spiel kommen – ist jedoch ein anderes Winkelmaß besser geeignet, das **Bogenmaß**. Es ist in gewisser Weise eine besonders „natürliche" Methode, die nicht von einer willkürlichen Unterteilung des vollen Winkels in soundsoviele Teile ausgeht, sondern einen gegebenen Winkel durch die *Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis (= Kreis mit Radius* 1*)* ausdrückt. Stellen Sie sich dazu am besten eine Torte oder eine Pizza mit Radius 1 vor! Einem rechten Winkel (der ja einem Viertel der Torte oder der Pizza entspricht) wird ein Bogenmaß von einem Viertel des Einheitskreis-Umfangs zugeordnet. Da der Umfang des Einheitskreises $2\,\pi$ beträgt, ist das Bogenmaß eines rechten Winkels $\frac{2\pi}{4}$, also $\frac{\pi}{2}$, was ungefähr gleich 1.570796 ist. Das Bogenmaß des vollen Winkels beträgt $2\,\pi \approx 6.283185$, das Bogenmaß des gestreckten Winkels beträgt $\pi \approx 3.141593$, und das Bogenmaß eines Winkels von $60°$ beträgt $\frac{\pi}{3} \approx 1.047198$. Winkel im Bogenmaß werden in der Regel ohne Einheit angegeben, also etwa – für die Hälfte eines rechten Winkels, im Gradmaß $45°$ – in der Form

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398. \tag{1.1}$$

Um zu betonen, dass eine Winkelangabe im Bogenmaß erfolgt, kann die Einheit rad (für *Radiant*) dazugeschrieben werden, also

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad} \approx 0.785398\,\mathrm{rad}. \tag{1.2}$$

Aber das ist nicht notwendig. Um diesen Winkel gleichzeitig im Gradmaß und im Bogenmaß anzugeben, können wir schreiben

$$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 \tag{1.3}$$

oder

$$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad} \approx 0.785398\,\mathrm{rad}. \tag{1.4}$$

Wenn Sie wollen, können Sie sich vorstellen, dass rad einfach 1 bedeutet, aber der Deutlichkeit halber bei einer Winkelangabe im Bogenmaß dazugeschrieben werden kann.

Um eine Winkelangabe vom Gradmaß ins Bogenmaß oder vom Bogenmaß ins Gradmaß umzurechnen, benutzen Sie einfach die Tatsache, dass der volle Winkel im Bogenmaß gleich $2\,\pi$ beträgt, d.h. dass

$$\frac{2\,\pi}{360°} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{360°}{2\,\pi} = 1 \tag{1.5}$$

ist[3]. Ist ein Winkel β von $72°$ gegeben, so rechnen wir um:

$$\beta = 72° = 72° \cdot \frac{2\pi}{360°} = 72 \cdot \frac{2\pi}{360} = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{5}\,\pi. \tag{1.6}$$

[2] $1\,\mathrm{gon}$ wurde früher als 1 „Neugrad" bezeichnet, $1°$ als 1 „Altgrad". Die Einheit *Gon* wurde 1992 eingeführt.

[3] Sie können die linken Seiten dieser Beziehungen natürlich durch 2 kürzen. Die obigen Identitäten werden dann zu $\dfrac{\pi}{180°} = 1$ bzw. $\dfrac{180°}{\pi} = 1$ oder, wenn Sie eine noch kürzere Formel dafür wünschen, $180° = \pi$.

Erkennen Sie, wie sich die Einheit $^\circ$ „herausgekürzt“ hat? Ist ein Winkel γ im Bogenmaß als $\frac{2}{3}\,\pi$ gegeben, so rechnen wir um:

$$\gamma = \frac{2}{3}\,\pi = \frac{2}{3}\,\pi \cdot \frac{360^\circ}{2\,\pi} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ. \tag{1.7}$$

Erkennen Sie, wie hier die Einheit $^\circ$ hereingekommen ist?

> Ein kleiner Hinweis: Bitte vergessen Sie bei einem im Gradmaß angegebenen Winkel nicht, die Einheit $^\circ$ dazuzuschreiben! Mit der Winkelangabe $\delta = 60$ ist *nicht* $\delta = 60^\circ$ gemeint, sondern $\delta = 60 \cdot \frac{360^\circ}{2\,\pi} \approx 3438^\circ$!

Winkel werden im Bogenmaß oft als rationale Vielfache von π angegeben, also etwa in der Form π, $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{2}{3}\,\pi$. Ob es sinnvoll ist, dafür numerische Näherungswerte anzugeben, hängt vom jeweiligen Zusammenhang ab, und auch die Genauigkeit, mit der solche Werte angeschrieben werden, sollte vernünftig gewählt werden. Tritt etwa als Resultat einer Berechnung der Winkel $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ auf, so ist das ein schönes Ergebnis und kann – sofern keine numerische Näherung verlangt ist – so stehen bleiben. Sie können diesen Winkel natürlich ins Gradmaß umrechnen, $\varepsilon = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{360^\circ}{2\,\pi} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, aber in einer Angabe wie $\varepsilon \approx 0.524$ ist die – unter Umständen wichtige – Information, dass es sich um ein Sechstel des gestreckten Winkels handelt, nicht mehr sichtbar. Werden auf einer Achse eines Koordinatensystems Winkel im Bogenmaß aufgetragen, so ist es meist sinnvoll, als Achsenmarkierungen nicht „runde Zahlen“ wie 0, 0.5, 1, 1.5, 2 zu wählen, sondern „runde Vielfache von π“, also etwa 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\,\pi$, $2\,\pi$.

Wenn Sie Berechnungen, in denen Winkel vorkommen, mit einem Taschenrechner oder Computerprogramm durchführen, müssen Sie zuerst wissen, ob eine numerische Eingabe (die Sie machen) oder eine Ergebnisausgabe (die Sie ablesen) im Gradmaß oder im Bogenmaß gemeint ist. Bei vielen Taschenrechnern können Sie zwischen den Einstellungen „RAD“ (Bogenmaß), „DEG“ (Gradmaß) und „GRD“, „GRA“ oder „GRAD“ (Neugradsystem) wählen. Machen Sie sich bitte in dieser Hinsicht mit den Rechnern oder Programmen, die Sie benutzen, vertraut!

Einen wichtigen Sachverhalt im Zusammenhang mit dem Bogenmaß müssen wir noch besprechen: Wir haben es zunächst durch die Kurzformel „Winkel im Bogenmaß = Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis“ eingeführt. Neben dieser Charakterisierung gibt es eine andere, damit eng verwandte, die Sie anwenden können, wenn ein Winkel α als Öffnungswinkel des Sektors eines Kreises auftritt, der *kein* Einheitskreis ist: Ist der Radius dieses Kreises gleich r und die Länge des Bogens gleich b, so ist der Winkel im Bogenmaß durch das Verhältnis

$$\alpha = \frac{b}{r} \tag{1.8}$$

gegeben. Warum? Das ergibt sich aus der *Ähnlichkeit* aller Sektoren beliebiger Kreise mit gleichem Öffnungswinkel, wie in Abbildung 1 illustriert. Machen wir einen Check: Der volle Winkel ist demnach das Verhältnis aus Umfang und Radius eines *beliebigen* Kreises, also

$$\frac{2\,\pi\,r}{r} = \frac{2\,\pi\,\cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\,\pi. \tag{1.9}$$

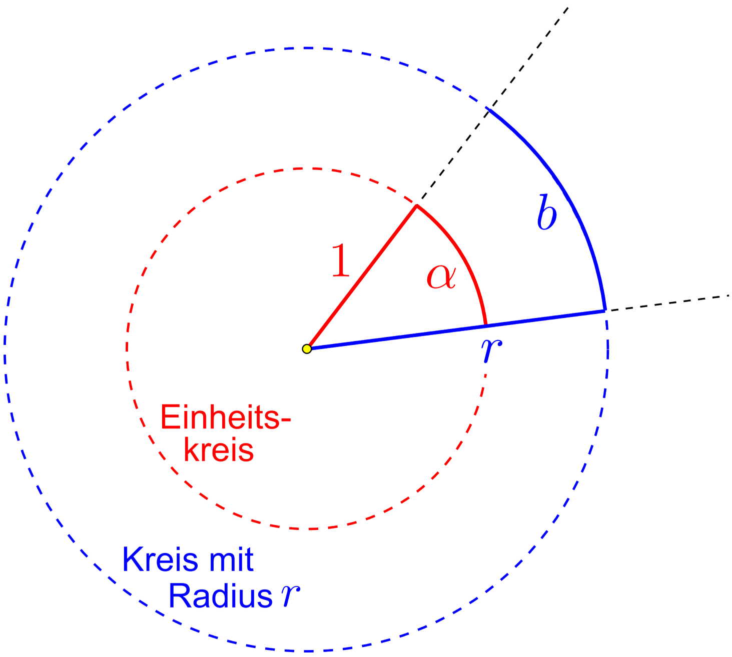


Abbildung 1: Ein Winkel α wird im Bogenmaß als Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis (hier rot) angegeben. Wird ein anderer Kreis herangezogen, der nicht den Radius 1 hat (hier blau), so ist α gleich dem Verhältnis der Länge des zugehörigen Bogens zum Radius, also $\alpha = \frac{b}{r}$. Die beiden dem Winkel entsprechenden Kreissektoren sind zueinander ähnlich.

Wir werden im Folgenden sowohl das Gradmaß als auch das Bogenmaß verwenden. Generell erkennen wir das jeweils verwendete Winkelmaß daran, ob $^\circ$ dabeisteht (dann ist der betreffende Winkel im Gradmaß angegeben) oder nicht (dann ist der betreffende Winkel im Bogenmaß angegeben).

2 Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Die Form und Größe eines rechtwinkeligen Dreiecks sind eindeutig festgelegt, wenn die Längen seiner Seiten[4] bekannt sind. Natürlich müssen sie den Satz von Pythagoras erfüllen. Werden die Katheten[5] mit a und b bezeichnet und die Hypotenuse mit c, so lautet der Satz von Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{2.1}$$

Sind a, b und c bekannt, so sind auch die (Innen-)Winkel des Dreiecks eindeutig festgelegt. Bezeichnen wir den der Seite a gegenüberliegenden Winkel mit α, den der Seite b ge-

[4] Statt „Länge einer Seite“ oder „Seitenlänge“ wird auch einfach „Seite“ gesagt. Wir werden zwischen den Seiten*linien* und den Seiten*längen* nicht unterscheiden, da praktisch immer klar ist, was gemeint ist.

[5] In einem rechtwinkeligen Dreieck wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als *Hypotenuse*, die beiden anderen Seiten als *Katheten* bezeichnet.

genüberliegenden Winkel mit β und den der Seite c gegenüberliegenden Winkel mit γ (siehe Abbildung 2), so ist $\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, und da die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich $180^\circ = \pi$ ist, gilt $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

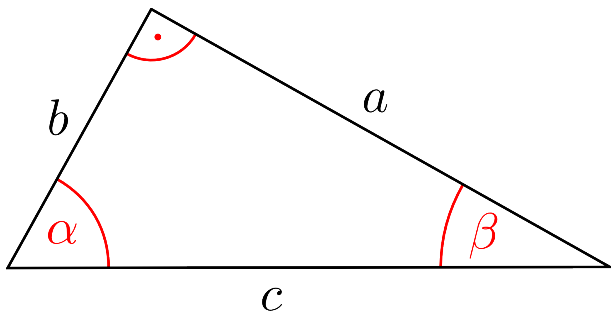


Abbildung 2: Ein rechtwinkeliges Dreieck. a und b sind die Katheten, c ist die Hypotenuse. (Die Symbole a, b und c bezeichnen sowohl die Seitenlinien als auch die Seitenlängen.) Oft werden (wie auch hier) die jeweils den Seiten gegenüberliegenden Winkel mit entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet, also α, β und γ. Da $\gamma = 90^\circ$ ist, ist statt des Namens das Symbol für einen rechten Winkel eingezeichnet (wobei anstelle des kleinen Kreisbogens manchmal auch ein „Eck" gezeichnet wird). Entsprechend einer oft verwendeten Konvention wurden Seiten und Winkel hier alphabetisch aufsteigend im Gegenuhrzeigersinn benannt.

Sind umgekehrt die Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks bekannt, so ist zwar nicht seine Größe bestimmt, wohl aber seine Form. Das bedeutet, dass alle Seitenverhältnisse, wie $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ usw. (wir bezeichnen die Seiten und Winkel wie zuvor) eindeutig festgelegt sind. Genau genommen muss nur *einer* der beiden nicht-rechten Winkel bekannt sein. Kennen wir etwa den Wert von α, so folgt $\beta = 90^\circ - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$, womit alle Winkel bekannt sind. Alle rechtwinkeligen Dreiecke mit gleichem Winkel α sind zueinander *ähnlich*, d.h. sie gehen durch „Aufblasen" oder „Schrumpfen" (und gegebenenfalls eine Spiegelung) auseinander hervor.

Welche Seitenverhältnisse weist nun ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Winkel α bekannt ist, auf? Nehmen wir zum Beispiel das Verhältnis $\frac{a}{c}$. Es hängt nur von α ab und nicht von der Größe des Dreiecks, ist also eine Funktion von α. Interessanterweise lässt es sich im allgemeinen Fall aus α nicht mit Hilfe der Grundrechnungsarten (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren) berechnen. Nicht einmal, wenn wir das Wurzelziehen als bekannte Operation dazunehmen, gelingt es, $\frac{a}{c}$ durch α auszudrücken. Hier ist also etwas Neues gefordert!

Um eine Bezeichnung dafür zur Hand zu haben, welchen Wert das Verhältnis $\frac{a}{c}$ für einen gegebenen Wert von α annimmt, brauchen wir einen neuen Namen. Wir nennen die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{a}{c}$ zuordnet, die **Sinusfunktion** oder kurz **Sinus**, abgekürzt mit $\sin$. Mit anderen Worten, wir legen fest, dass

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \tag{2.2}$$

gelten soll[6]. Eine sprachliche Kurzformel ergibt sich nach einem Blick auf Abbildung 2: Die

[6] Statt $\sin\alpha$ kann auch $\sin(\alpha)$ geschrieben werden, also mit der üblichen Funktionsklammer. Wir werden diese Schreibweise insbesondere dann verwenden, wenn wir den Sinus eines im Gradmaß angegebenen Winkels wie $\sin(30^\circ)$ oder den Sinus eines zusammengesetzten Ausdrucks wie $\sin(90^\circ - \alpha)$ anschreiben. Gleiches gilt auch für die nachfolgend definierten Funktionen $\cos$, $\tan$ und $\cot$.

Seite a ist jene Kathete, die dem Winkel α gegenüber liegt – wir nennen sie die *Gegenkathete* von α. Die Seite c ist die Hypotenuse des Dreiecks. Wir können also knapp (ohne auf konkrete Seitennamen Bezug zu nehmen) formulieren:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\,. \tag{2.3}$$

Um das Verhältnis $\frac{b}{c}$ durch α auszudrücken, nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{b}{c}$ zuordnet, die **Cosinusfunktion** oder kurz **Cosinus** (manchmal auch **Kosinus** genannt), abgekürzt mit $\cos$. Mit anderen Worten, wir legen fest, dass

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{2.4}$$

gelten soll. Da b jene Kathete ist, die dem Winkel α „anliegt", nennen wir sie die *anliegende Kathete* oder *Ankathete* von α. Wir können also knapp (ohne auf konkrete Seitennamen Bezug zu nehmen) formulieren:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\,. \tag{2.5}$$

Um das Verhältnis $\frac{a}{b}$ der beiden Katheten durch α auszudrücken, nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{a}{b}$ zuordnet, die **Tangensfunktion** oder kurz **Tangens**, abgekürzt mit $\tan$. Damit gilt also[7]

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \tag{2.6}$$

oder, in einer Formulierung, die keine konkreten Seitennamen enthält,

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\,. \tag{2.7}$$

Schließlich nennen wir die Funktion, die jedem Winkel α den Wert des Seitenverhältnisses $\frac{b}{a}$ zuordnet, die **Cotangensfunktion** oder kurz **Cotangens** (manchmal auch **Kotangens** genannt), abgekürzt mit $\cot$. Damit gilt also[8]

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\,. \tag{2.8}$$

Die vier Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens sind nicht voneinander unabhängig, sondern es bestehen zahlreiche Beziehungen zwischen ihnen. Dividieren wir etwa beide Seiten des Satzes von Pythagoras (2.1) durch c^2, so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \tag{2.9}$$

[7] Statt $\tan$ wird manchmal auch die ältere Bezeichnung tg für den Tangens verwendet.
[8] Statt $\cot$ wird manchmal auch die ältere Bezeichnung ctg für den Cotangens verwendet.

was mit den Definitionen (2.2) und (2.4) die Identität

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.10}$$

impliziert. Die Symbole $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ stehen hier für $(\sin\alpha)^2$ und $(\cos\alpha)^2$. Wird $\frac{a}{b}$ mit $1/c$ erweitert, also in der Form $\frac{(a/c)}{(b/c)}$ geschrieben, ergibt sich mit (2.6) die weitere Identität

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \tag{2.11}$$

und da $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ Kehrwerte voneinander sind (ihr Produkt ist ja gleich 1), erhalten wir mit (2.8)

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}\,. \tag{2.12}$$

Die Funktionen $\tan$ und $\cot$ hätten wir statt wie in (2.6) und (2.8) gleich auch in der Form (2.11) und (2.12) definieren können.

Wenden wir uns nun dem Winkel β zu: Mit ihm können wir genau das Gleiche machen wie mit dem Winkel α. Was für α die Gegenkathete war, ist für β nun die Ankathete, und umgekehrt. Damit ergibt sich

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha \tag{2.13}$$

und

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha. \tag{2.14}$$

Da im rechtwinkeligen Dreieck $\alpha + \beta = 90°$ gilt, folgern wir daraus, dass stets die Identitäten

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \tag{2.15}$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \tag{2.16}$$

gelten.

Unsere vier Winkelfunktionen sind nun durch (2.10), (2.11) und (2.12) sowie (2.15) – (2.16) miteinander verbunden. Bitte merken Sie sich diese Beziehungen – sie werden oft benötigt! Ist für einen konkreten Winkel der Wert einer der vier Winkelfunktionen bekannt, so können die Werte der drei anderen recht einfach berechnet werden.

Apropos berechnen: Das Problem, wie die Werte der Winkelfunktionen *berechnet* werden, ist damit noch nicht gelöst. Wir haben ja lediglich Namen für bestimmte Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck vergeben. Wir werden das Problem auch hier nicht lösen, sondern überlassen konkrete Berechnungen – wie beispielsweise auch das Wurzelziehen – dem Taschenrechner oder Computer. So finden wir etwa mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs $\sin(17°) \approx 0.292371705$ und $\cos(\frac{\pi}{13}) \approx 0.970941817$.

> Berechnen Sie zur Übung mit Ihrem Taschenrechner oder dem von Ihnen verwendeten Computerprogramm $\sin(19°)$ und $\cos(\frac{3\pi}{7})$! Als Ergebnisse sollten Sie erhalten: $\sin(19°) \approx 0.325568154$ und $\cos(\frac{3\pi}{7}) \approx 0.222520934$.

Achten Sie darauf, ob Ihre Eingabe im Gradmaß oder im Bogenmaß erfolgen muss! Finden Sie heraus, ob bzw. wie Sie zwischen diesen beiden Optionen wechseln können!

Hier ein kleiner **Tipp**: Wir werden gleich lernen, dass auch der Winkel $90°$ zugelassen ist. Für ihn gilt $\sin(90°) = 1$. Weiters ist $\sin(90) \approx 0.893996664$. Beachten Sie: $\sin(90)$ bedeutet $\sin(90\,\mathrm{rad})$. Berechnen Sie nun mit Ihrem Taschenrechner „Sinus von 90"! (Je nach Funktionsweise des Rechners müssen Sie dafür entweder zuerst $\sin$ und dann 90 oder zuerst 90 und dann $\sin$ eingeben.) Ist das Ergebnis 1, so interpretiert Ihr Rechner eine Winkeleingabe im Gradmaß. Ist das Ergebnis 0.893996664, so interpretiert er eine Winkeleingabe im Bogenmaß. (Falls Ihr Rechner keinen Wechsel zwischen Grad- und Bogenmaß vorsieht, müssen Sie, sofern ein Winkel nicht im verlangten Winkelmaß angegeben ist, diesen zuerst wie im vorigen Abschnitt besprochen umrechnen.)

Die Methoden, die diese elektronischen Hilfswerkzeuge benutzen, um konkrete Werte der Winkelfunktionen (näherungsweise, aber im Prinzip beliebig genau) zu ermitteln, werden erst in der höheren Mathematik bereitgestellt, vor allem von der Differentialrechnung. Aber auch ohne Kenntnis dieser Methoden können wir *sehr viel* Nützliches mit Winkelfunktionen tun.

Einige „schöne" Winkel sind insofern Ausnahmen, als die Winkelfunktionen für sie „schöne" Zahlenwerte annehmen, die sich durch die Grundrechnungsarten (inklusive Wurzelziehen) ausdrücken lassen. Um sie zu ermitteln, benötigen wir keine technologische Hilfe, sondern nur die konsequente Anwendung unserer Definitionen. So ist beispielsweise

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{2.17}$$

Warum? Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck ein nicht-rechter Winkel gleich $45°$, so hat es die gleiche Form wie ein Geodreieck. Es gilt dann (mit den gleichen Seiten- und Winkelbezeichnungen wie bisher) $a = b$, und aus dem Satz von Pythagoras (2.1) folgt sofort $2\,a^2 = c^2$, also $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Mit unseren Definitionen (2.2) und (2.4) (oder den Kurzformeln (2.3) und (2.5)) ergibt sich damit sofort (2.17). Daraus folgt mit (2.11)

$$\tan(45°) = 1, \tag{2.18}$$

eine nicht nur einfache, sondern auch sehr wichtige Beziehung.

Zwei weitere Winkel, deren Werte für Sinus und Cosinus man kennen sollte, sind $30°$ und $60°$. Für sie gilt:

$$\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2} \tag{2.19}$$

$$\cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{2.20}$$

In einer Übungsaufgabe am Ende dieses Skriptums sollen Sie das selbst zeigen!

Wir lassen auch die Winkel $0°$ und $90°$ zu. Sie entsprechen dem Grenzfall eines zu einem Strich zusammengeklappten rechtwinkeligen Dreiecks. Ist $\alpha = 0$, so ist die Gegenkathete von α zu einem Punkt geschrumpft und die Ankathete mit der Hypotenuse zusammengefallen, und mit $\alpha = 90°$ ist es gerade umgekehrt. Damit ergibt sich

$$\sin(0°) = \cos(90°) = \tan(0°) = \cot(90°) = 0 \tag{2.21}$$

$$\cos(0°) = \sin(90°) = 1. \tag{2.22}$$

Der Tangens von $90°$ und der Cotangens von $0°$ sind nicht definiert, da man bei ihrer Berechnung durch 0 dividieren müsste[9].

3 Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Das Konzept der Winkelfunktionen lässt sich auf natürliche Weise für Winkel, die größer als $90°$ sind, übertragen. Dazu betrachten wir einen Punkt P auf dem Einheitskreis der Zeichenebene (d.h. auf dem Kreis mit Radius 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung O liegt[10]). Mit α wollen wir den von der positiven ersten Achse aus im Gegenuhrzeigersinn bis zur Verbindungsstrecke OP gemessenen Winkel bezeichnen. (Negative Winkel werden entsprechend im Uhrzeigersinn gemessen.) In Abbildung 3 ist diese Situation für einen Punkt P dargestellt, der im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt (d.h. dessen Koordinaten beide positiv sind) und für den daher $0 < \alpha < 90°$ gilt. Wir benutzen das rechtwinkelige Dreieck, dessen Katheten in blau dargestellt sind und dessen Hypotenuse die Länge 1 (Radius des Einheitskreises!) hat, um $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ abzulesen:

- $\sin\alpha$ ist gleich der Gegenkathete von α (dividiert durch 1) und daher gleich der zweiten Koordinate von P.
- $\cos\alpha$ ist gleich der Ankathete von α (dividiert durch 1) und daher gleich der ersten Koordinate von P.

Wir können den Punkt P daher in Koordinatenform $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ schreiben. In der Abbildung gibt es noch ein zweites, zum ersten ähnliches rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf der Verlängerung der Strecke OP zu einer Geraden (der Trägergeraden von OP) liegt. Die Ankathete von α in diesem Dreieck liegt auf der ersten Achse und hat die Länge 1 (Radius des Einheitskreises!). Die Gegenkathete liegt auf der „vertikalen" Geraden, deren erste Koordinate gleich 1 ist (sie wird auch *Tangens-Schiene* genannt), und reicht von der ersten Achse bis zum Schnittpunkt mit der Trägergeraden von OP. Wir lesen wieder ab:

- $\tan\alpha$ ist gleich der Gegenkathete von α (dividiert durch 1, der Länge der Ankathete) und daher gleich der zweiten Koordinate des Schnittpunkts der Tangens-Schiene mit der Trägergeraden von OP.

Damit ist $\tan\alpha$ gleich dem Anstieg[11] der Trägergeraden von OP.

---

[9] Manchmal wird – salopp – gesagt, $\tan(90°)$ sei „unendlich". Obwohl das eine bequeme Ausdrucksweise ist, sollte man sich darüber im Klaren sein, dass sie im Grunde genauso falsch ist wie die Aussage, dass $\frac{1}{0}$ gleich „unendlich" ist.

[10] Generell ist ein Einheitskreis ein Kreis mit Radius 1. Ist ein Koordinatensystem gegeben, so meint man mit „dem" Einheitskreis den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung.

[11] Zum Begriff des Anstiegs siehe das Skriptum über *lineare Funktionen und ihre Graphen*.

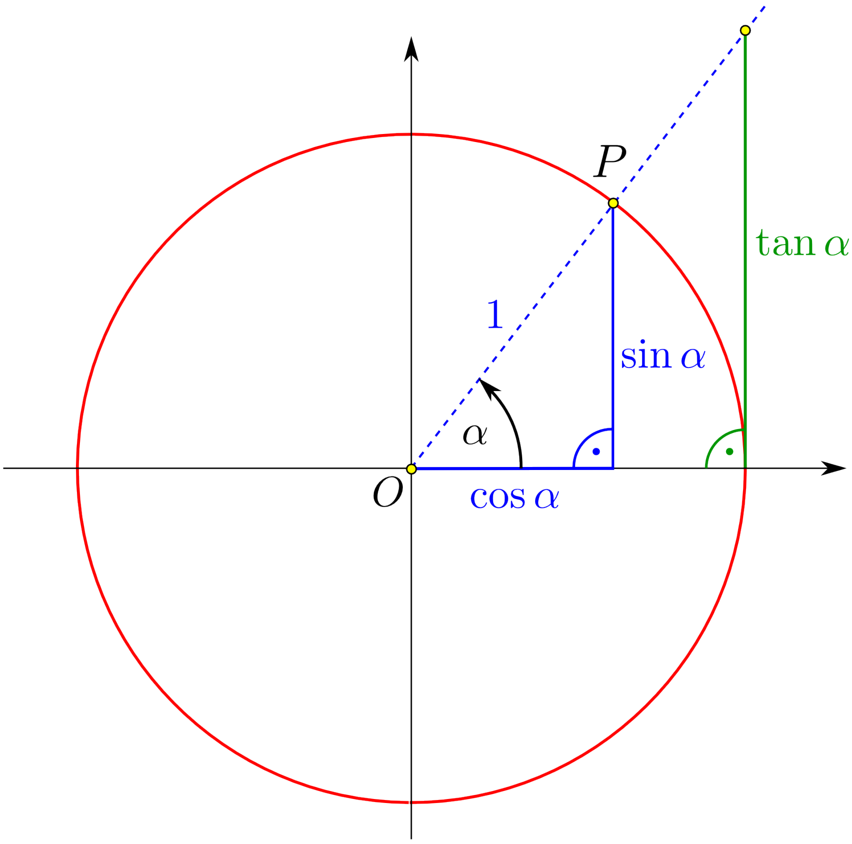


Abbildung 3: Definition der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens für *beliebige* Winkel. Der Koordinatenursprung ist mit O bezeichnet, der Einheitskreis ist rot dargestellt. P ist ein Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten. Der Winkel α wird von der positiven ersten Achse aus im Gegenuhrzeigersinn bis zur Strecke OP gemessen. Er ist kleiner als $90°$. Die Koordinaten des Punktes P sind dann $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Der Tangens von α ist gleich der zweiten Koordinate des Schnittpunkts der Trägergeraden der Strecke OP mit jener Gerade, deren erste Koordinate gleich 1 ist (der Tangens-Schiene) und damit gleich dem Anstieg der Trägergeraden von OP.

Wir können unser Konzept der Winkelfunktionen nun auf *beliebige* Winkel verallgemeinern: Ist P ein *beliebiger* Punkt auf dem Einheitskreis (für den der Winkel α auch größer als $90°$ sein darf), so bezeichnen wir mit $\sin\alpha$ die zweite Koordinate von P und mit $\cos\alpha$ die erste Koordinate von P. Mit anderen Worten: Wir definieren Sinus und Cosinus für beliebige Winkel durch die Beziehung

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha), \tag{3.1}$$

d.h. als **Koordinaten des Punktes** P. Über die Beziehungen (2.11) und (2.12) werden dann $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ festgelegt.

Nun dehnen wir den Zahlenbereich, mit dem Winkel gekennzeichnet werden, noch weiter aus: Wird α, beginnend mit $0°$, kontinuierlich vergrößert, so wandert der Punkt P, beginnend mit $P = (1, 0)$, wie die Spitze eines Uhrzeigers (aber im Gegenuhrzeigersinn) auf dem Einheitskreis. Nach einem vollendeten Umlauf ist α auf $360°$ angewachsen und müsste nun wieder auf $0°$ zurückspringen. Das ist manchmal sehr unpraktisch, und so entschließen wir uns, *beliebige*

Werte als Winkelangaben zuzulassen. Dabei müssen wir nur bedenken, dass zwei Winkel, deren Differenz im Gradmaß gleich $360°$ (im Bogenmaß gleich $2\,\pi$) ist, die *gleiche geometrische Bedeutung* haben. Wir identifizieren beispielsweise

$$365° \longleftrightarrow 5° \tag{3.2}$$
$$\frac{5}{2}\,\pi \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} \tag{3.3}$$
$$-5° \longleftrightarrow 355° \tag{3.4}$$
$$-\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow \frac{3}{2}\,\pi \tag{3.5}$$

Damit machen wir die Winkelfunktionen zu **periodischen Funktionen** – ein Aspekt, der uns später in diesem Skriptum, wenn wir uns ihre Graphen ansehen, noch begegnen wird.

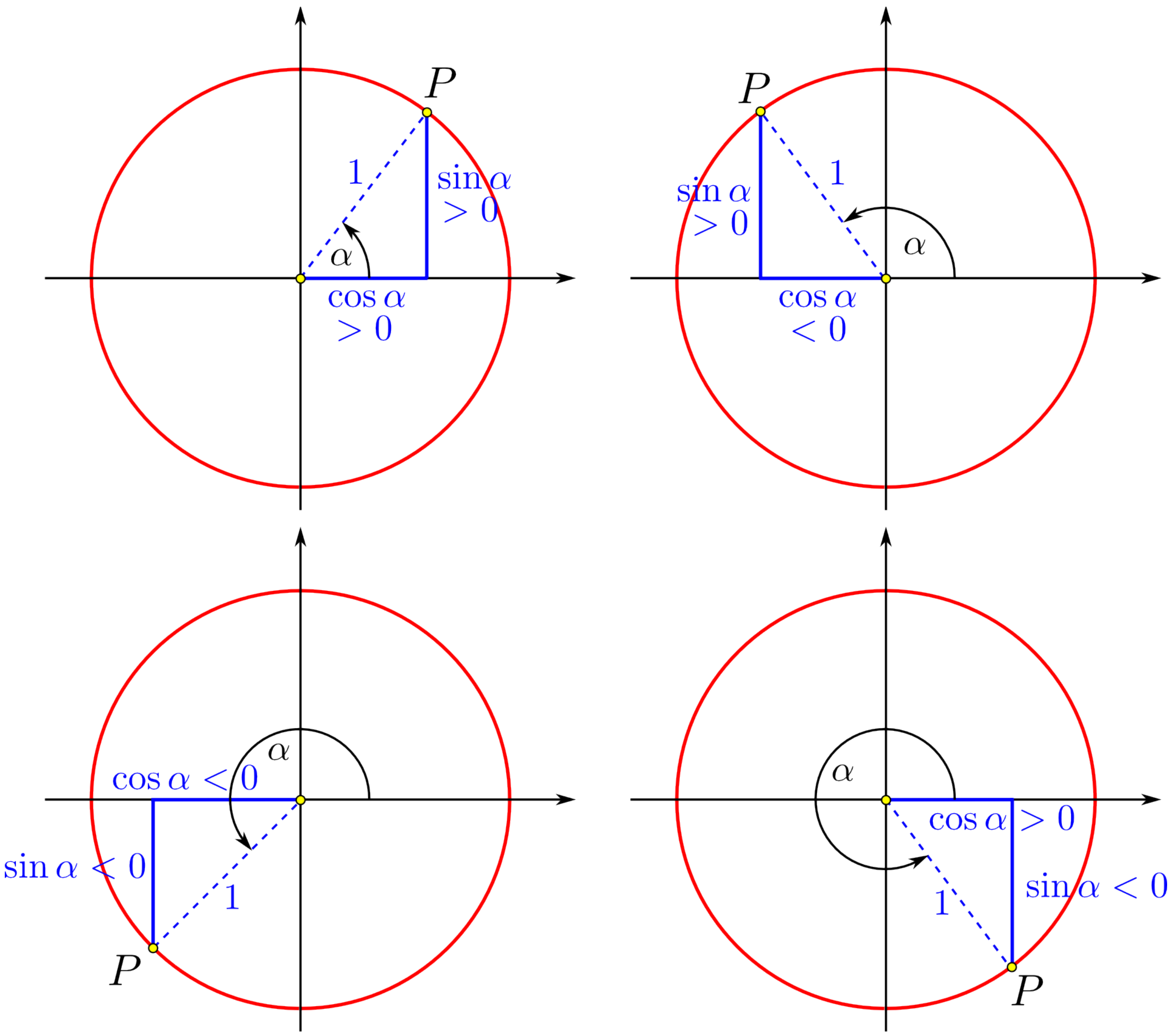


Abbildung 4: Definition der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus für beliebige Winkel auf dem Einheitskreis.

Je nachdem, in welchem Quadranten P liegt, können unsere vier Winkelfunktionen nun auch negative Werte annehmen. In Abbildung 4 ist illustriert, wie die Vorzeichen von Sinus und Cosinus zustande kommen, wenn P in einem der vier Quadranten liegt. Der Tangens eines Winkels ist auch im allgemeinen Fall gleich dem **Anstieg der Trägergeraden von** OP (in Abbildung 4 blau strichliert eingezeichnet). Den vier Quadranten entsprechen folgende Vorzeichenkombinationen:

- Abbildung 4 links oben: P liegt im ersten Quadranten, $0° < \alpha < 90°$ (im Bogenmaß: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Die Vorzeichen von $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ sind $(+,+)$. Weiters gilt $\tan\alpha > 0$, da die strichlierte Strecke einen positiven Anstieg hat.
- Abbildung 4 rechts oben: P liegt im zweiten Quadranten, $90° < \alpha < 180°$ (im Bogenmaß: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). Die Vorzeichen von $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ sind $(-,+)$. Weiters gilt $\tan\alpha < 0$, da die strichlierte Strecke einen negativen Anstieg hat.
- Abbildung 4 links unten: P liegt im dritten Quadranten, $180° < \alpha < 270°$ (im Bogenmaß: $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$). Die Vorzeichen von $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ sind $(-,-)$. Weiters gilt $\tan\alpha > 0$, da die strichlierte Strecke einen positiven Anstieg hat.
- Abbildung 4 rechts unten: P liegt im vierten Quadranten, $270° < \alpha < 360°$ (im Bogenmaß: $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$). Die Vorzeichen von $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ sind $(+,-)$. Weiters gilt $\tan\alpha < 0$, da die strichlierte Strecke einen negativen Anstieg hat.
- Für Winkelangaben $< 0°$ und $> 360°$ werden die Winkelfunktionen periodisch fortgesetzt.

Ist α ein ganzzahliges Vielfaches des rechten Winkels, dann liegt P auf einer der Koordinatenachsen (d.h. auf einer Grenzlinie zwischen zwei Quadranten), und in diesem Fall ist einer der beiden Werte für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gleich 0 und der andere 1 oder -1. Einer der beiden Werte für $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ ist dann gleich 0, der andere ist nicht definiert.

Die von uns früher für Winkel zwischen $0°$ und $90°$ erhaltene Identität (2.10) gilt ganz allgemein[12] (sie drückt aus, dass P auf dem Einheitskreis liegt), und auch die Identitäten (2.15) und (2.16) gelten für beliebige Winkel α.

> Aufgrund der Definitionen von Sinus und Cosinus als Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis liegt es auf der Hand, dass diese beiden Winkelfunktionen zur Beschreibung von **Kreisbewegungen** benutzt werden können. Bewegt sich der Punkt P, beginnend mit $P = (1, 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis, so ist der Winkel α zu einem Zeitpunkt t gleich $\omega\, t$. Die Winkelgeschwindigkeit ω gibt an, welcher Winkel pro Zeitintervall von einem Pfeil („Zeiger"), der vom Ursprung zum Punkt P verläuft, „überstrichen" wird[13]. Der Punkt P hat dann die Koordinaten

[12] Aus der Identität (2.10) folgt übrigens, dass $\cos\alpha$ entweder gleich $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ oder gleich $-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ist, je nachdem, in welchem Quadranten P liegt.

[13] Das ist ganz analog zur Geschwindigkeit, die angibt, welche Strecke pro Zeitintervall zurückgelegt wird. Eine typische Einheit der Geschwindigkeit ist $\mathrm{m/s}$ (Meter pro Sekunde), und analog dazu wird eine Winkelgeschwindigkeit entweder (wenn der Winkel im Gradmaß gemessen wird) in Grad pro Sekunde oder (wenn der Winkel im Bogenmaß gemessen wird) in Radiant pro Sekunde, d.h. einfach in Sekunde^{-1} (s^{-1}) angegeben. Siehe dazu auch Fußnote 22.

$$P(t) = (\cos(\omega\, t), \sin(\omega\, t)).$$

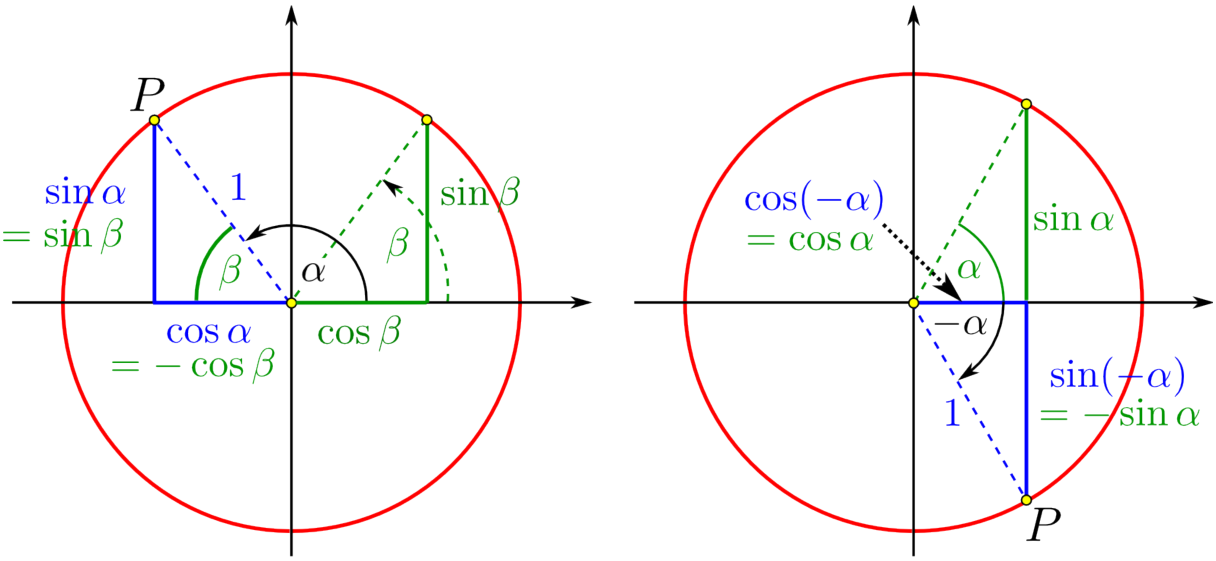


Abbildung 5: Sinus und Cosinus beliebiger Winkel können auf Winkel, die zwischen $0°$ und $90°$ liegen, zurückgeführt werden. Hier zwei Beispiele:
– Links: Zur Illustration der Identitäten (3.6) und (3.7).
– Rechts: Zur Illustration der Identitäten (3.8) und (3.9).

Jene Werte der Winkelfunktionen, für die P nicht im ersten Quadranten liegt, können leicht auf rechtwinkelige Dreiecke zurückgeführt werden, wie Abbildung 5 (links) anhand eines Winkels zwischen $90°$ und $180°$ zeigt. Der eingezeichnete Hilfswinkel β tritt in einem rechtwinkeligen Dreieck auf, womit sich die Koordinaten von P durch $\sin\beta$ und $\cos\beta$, die aus den Definitionen (2.3) und (2.5) folgen, ausdrücken lassen. Da α und β zusammen einen gestreckten Winkel bilden, also $\beta = 180° - \alpha$ gilt, erhalten wir die zwei Identitäten

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha \tag{3.6}$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \tag{3.7}$$

die sogar für *beliebige* Winkel α gelten.

Zwei weitere Identitäten, die für beliebige Winkel gelten, sind

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \tag{3.8}$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tag{3.9}$$

wie in Abbildung 5 (rechts) für α zwischen $0°$ und $90°$ gezeigt. Wir sagen, dass der Sinus eine **ungerade** Funktion und der Cosinus eine **gerade** Funktion ist[14].

Schließlich gelten die Identitäten

$$\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha \tag{3.10}$$
$$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha \tag{3.11}$$

[14] Mehr zu diesen beiden Begriffen finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

gemäß unserer Vereinbarung, dass die Werte jeder Winkelfunktion für unterschiedlich angegebene Winkel, die aber geometrisch das Gleiche bedeuten, gleich sind. Wir sagen, dass Sinus und Cosinus **periodische Funktionen**[15] mit Periode $360°$ (im Bogenmaß: 2π) sind. Da sich die Werte von Tangens und Cotangens bereits nach einer halben Umrundung des Einheitskreises wiederholen (überlegen Sie selbst, warum!), gilt

$$\tan(\alpha + 180°) = \tan\alpha \tag{3.12}$$
$$\cot(\alpha + 180°) = \cot\alpha \tag{3.13}$$

für beliebige α. Daher sind auch der Tangens und der Cotangens periodische Funktionen, allerdings mit (kleinster) Periode $180°$ (im Bogenmaß: π).

Abbildung 6 zeigt die Werte von Sinus und Cosinus für einige häufig auftretende Winkel im Einheitskreis.

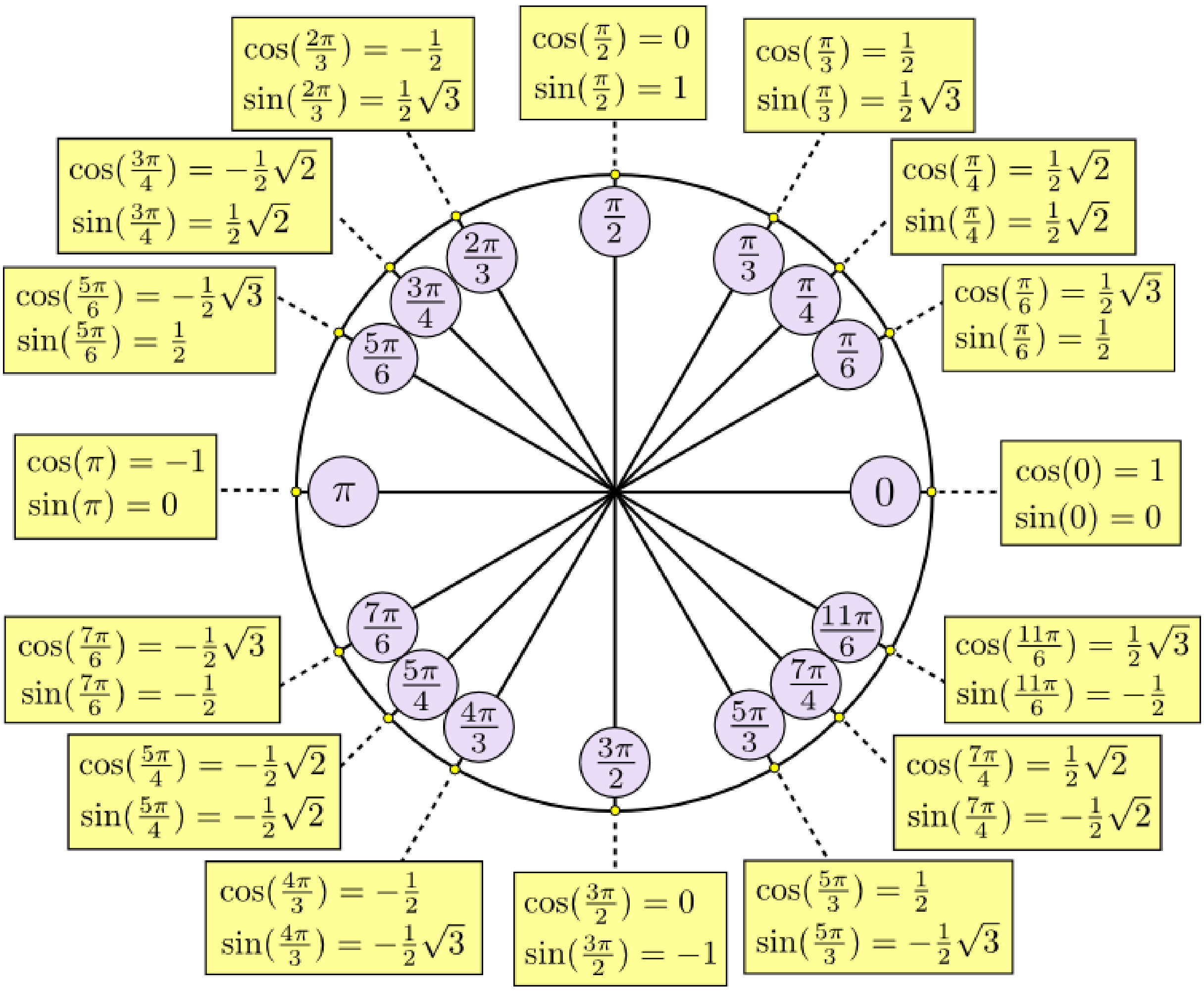


Abbildung 6: Sinus und Cosinus für einige häufig auftretende Winkel im Einheitskreis. Für die Werte im ersten Quadranten vgl. (2.17), (2.19) und (2.20).

[15] Mehr zu diesem Begriff finden Sie im Skriptum *Der Funktionenzoo*.

4 Winkelfunktionen in beliebigen Dreiecken

In beliebigen (also nicht notwendigerweise rechtwinkeligen) Dreiecken gelten zwei Sätze, die für geometrische Berechnungen wichtig sind, und die wir (ohne Beweis) angeben. Mit der gleichen Bezeichnungskonvention, die wir bereits früher für rechtwinkelige Dreiecke verwendet haben (die Seiten sind a, b und c, die ihnen jeweils gegenüberliegenden (Innen-)Winkel sind α, β und γ), lauten sie:

Sinussatz:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,, \tag{4.1}$$

was auch in der Form

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\,, \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}\,, \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a} \tag{4.2}$$

angeschrieben werden kann[16]. In Worten besagt (4.1), dass das Verhältnis „Sinus eines Winkels zur gegenüberliegenden Seite“ für alle drei Winkel gleich ist. (4.2) besagt, dass das Verhältnis zweier Seiten gleich dem Verhältnis der Sinusse der gegenüberliegenden Winkel ist.

Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \tag{4.3}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \tag{4.4}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta. \tag{4.5}$$

Beachten Sie, in welchen Kombinationen die Seiten und Winkel hier vorkommen: Links tritt jeweils eine Seite auf, rechts treten die zwei anderen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel auf.

> Ist einer der Winkel, sagen wir γ, gleich $90°$, so ist gemäß (2.21) $\cos\gamma = 0$, womit (4.3) in den Satz von Pythagoras (2.1) übergeht. Wird dann c^2 in den anderen beiden Identitäten durch $a^2 + b^2$ ersetzt, so reduzieren sich diese auf die Definitionen von Sinus und Cosinus im rechtwinkeligen Dreieck, besagen also nichts Neues. Der Cosinussatz kann daher als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf beliebige Dreiecke angesehen werden.

Die Formeln (4.3) – (4.5) können nach den Cosinussen der Winkel aufgelöst werden. Daher kann der Cosinussatz dazu benutzt werden, die Winkel in Dreiecken, in denen nur Längen bekannt sind, zu berechnen[17].

[16] Wir erwähnen nebenbei zwei weitere interessante Beziehungen: Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks gilt $2\,A = a\,b\,\sin\gamma = b\,c\,\sin\alpha = c\,a\,\sin\beta$. Für den Radius R des Umkreises gilt $2\,R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

[17] Das verweist auf eine tiefere, für die Grundlagen der Mathematik wichtige Bedeutung des Cosinussatzes: Mit seiner Hilfe lässt sich der Winkelbegriff auf den Längenbegriff zurückführen.

5 Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Gerade haben wir gesagt, dass der Cosinussatz dazu benutzt werden kann, die Winkel in Dreiecken, in denen nur Längen bekannt sind, zu berechnen.

> Gilt beispielsweise $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$, so folgt aus (4.3), dass $\cos\gamma = \frac{1}{8}$ ist. Das wirft die Frage auf, welche Winkel einen Cosinus von $\frac{1}{8}$ haben.

Auch im Zusammenhang mit dem Sinussatz tritt eine derartige Problemstellung auf:

> Ist etwa in einem Dreieck $a = 7$, $b = 3$ und $\alpha = 63°$, so berechnen wir mit (4.2) $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{3}{7}\sin(63°) \approx 0.38186$. Hier stehen wir vor der Frage, welche Winkel einen Sinus von 0.38186 haben.

Die numerische Berechnung von Winkeln, deren Sinus oder Cosinus wir kennen, lassen wir wieder unsere elektronischen Werkzeuge (Taschenrechner oder Computerprogramm) durchführen. Es ist aber nützlich, den Operationen, die diese Werkzeuge durchführen, einen Namen zu geben. Wir nennen Sie die **Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen**, kurz **inverse Winkelfunktionen** oder **Arcusfunktionen**[18]. Es sind dies:

- Die Funktion **Arcus Sinus** (Symbol $\arcsin$ oder kurz asin) weist jeder Zahl c, die zwischen -1 und 1 liegt, jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\sin\alpha = c$ gilt und der zwischen $-90°$ und $90°$ (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt.
- Die Funktion **Arcus Cosinus** (Symbol $\arccos$ oder kurz acos) weist jeder Zahl c, die zwischen -1 und 1 liegt, jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\cos\alpha = c$ gilt und der zwischen $0°$ und $180°$ (im Bogenmaß: zwischen 0 und π) liegt.
- Die Funktion **Arcus Tangens** (Symbol $\arctan$ oder kurz atan) weist jeder reellen Zahl c jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\tan\alpha = c$ gilt und der zwischen $-90°$ und $90°$ (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt.
- Die Funktion **Arcus Cotangens** (Symbol arccot oder kurz acot) weist jeder reellen Zahl $c \neq 0$ jenen (eindeutig bestimmten) Winkel α zu, für den $\cot\alpha = c$ gilt und der zwischen $-90°$ und $90°$ (im Bogenmaß: zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$) liegt. Für $c = 0$ ist $\mathrm{acot}(0) = 90° = \frac{\pi}{2}$ definiert.

Der tiefere Grund für diese recht kompliziert anmutenden Beschreibungen liegt darin, dass ein Winkel durch den Wert einer seiner Winkelfunktionen nicht eindeutig bestimmt ist. So gibt es beispielsweise zwei Winkel zwischen $0°$ und $360°$, deren Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, nämlich $30°$ und $150°$. (Das geht aus der Darstellung des Sinus als zweite Koordinate des entsprechenden Punktes P auf dem Einheitskreis gemäß Abbildung 4 hervor: Es gibt genau zwei Möglichkeiten für P, am Einheitskreis zu liegen und als zweite Koordinate $\frac{1}{2}$ zu haben. Sie entsprechen genau den Winkeln $\alpha = 30°$ und $\alpha = 150°$. Zeichnen Sie diese Situation auf!) Wollen wir das Bilden des Sinus „umkehren“, so müssen wir eine Wahl treffen, welcher dieser beiden Winkel

[18] Vom lateinischen *arcus* für „Bogen“. Erinnern Sie sich, dass ein Winkel im Bogenmaß als Länge des Bogens am Einheitskreis gemessen wird! Funktionen, deren Funktionswerte Winkel sind, werden daher als *Arcus*funktionen bezeichnet, und ihren Symbolen wird ein arc (oft zu a verkürzt) vorangestellt.

ausgegeben werden soll, und das Gleiche gilt auch für die anderen Winkelfunktionen[19]. Die obige Beschreibung der Arcusfunktionen drückt eine solche Wahl aus.

> Auf wissenschaftlichen Taschenrechnern sind die Tasten für die inversen Winkelfunktionen entweder durch ein vorangestelltes „arc" (oder „a") oder durch ein hochgestelltes $^{-1}$ gekennzeichnet. Den Arcus Sinus finden Sie also unter einer der Bezeichnungen „arcsin", „asin" oder „$\sin^{-1}$", manchmal auch, indem vor „sin" eine Taste namens „inv" gedrückt wird. Um diese Funktionen nutzen zu können, müssen Sie allerdings wissen, ob die Ausgabe im Gradmaß oder im Bogenmaß erfolgt.
>
> Hier ein nützlicher **Tipp**: Um zu testen, in welchem Winkelmaß Ihr Rechner einen Winkel ausgibt, müssen Sie lediglich $\mathrm{asin}(1)$ berechnen. Ist das Ergebnis 90, so handelt es sich um eine Ausgabe im Gradmaß, die als $90°$ zu verstehen ist. Ist das Ergebnis 1.570796327, so handelt es sich um eine Ausgabe im Bogenmaß, die als $\frac{\pi}{2}$ zu verstehen ist.

Falls Sie mit Hilfe der inversen Winkelfunktionen Dreiecksberechnungen durchführen, so bedenken Sie, dass in einem Dreieck nur (Innen-)Winkel zwischen $0°$ und $180°$ auftreten können. Das entspricht gemäß Abbildung 4 der Situation, dass der Punkt P im ersten oder zweiten Quadranten (also oberhalb der ersten Achse) liegt. Ist der Cosinus eines solchen Winkels (also die erste Koordinate von P) bekannt, so ist der Winkel eindeutig bestimmt und wird mit Hilfe der Arcus Cosinus-Funktion berechnet.

> Damit können wir das erste der oben gestellten Probleme lösen: Gilt in einem Dreieck $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$, so folgt aus (4.3), dass $\cos\gamma = \frac{1}{8}$ ist. Daher ist $\gamma = \mathrm{acos}(\frac{1}{8}) \approx 82.819°$ (im Bogenmaß ≈ 1.4455).

Ist hingegen der Sinus eines Winkels zwischen $0°$ und $180°$ (also die zweite Koordinate von P) bekannt (und $\neq 1$), so gibt es *zwei* Winkel zwischen $0°$ und $180°$, die den gleichen Sinus haben. Die Arcus Sinus-Funktion gibt einen dieser beiden Winkel aus (und zwar jenen, der zwischen $0°$ und $90°$ liegt). Ist einer der beiden Winkel α, so ist der andere $180° - \alpha$. Welcher der gesuchte ist (oder ob das gestellte geometrische Problem zwei Lösungen hat), muss dann aus dem jeweiligen Kontext erschlossen werden.

> Damit können wir das zweite der oben gestellten Probleme lösen: Ist in einem Dreieck $a = 7$, $b = 3$ und $\alpha = 63°$, so berechnen wir mit (4.2) $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \approx 0.38186$. Daher gibt es zwei Möglichkeiten für den Winkel β, nämlich $\beta_1 \approx \mathrm{asin}(0.38186) \approx 22.4489°$ (im Bogenmaß: ≈ 0.391808) und $\beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 157.551°$ (im Bogenmaß: ≈ 2.74978). Da aber $\alpha + \beta_2$ mit ungefähr $221°$ größer als $180°$ ist, kann β_2 kein Innenwinkel eines Dreiecks sein und scheidet aus. Das Problem besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich $\beta = \beta_1$. Zeichnen Sie die angegebene geometrische Problemstellung auf!

[19] Das ist ganz analog zum Quadrieren und dem Wurzelziehen: Es gibt zwei Zahlen, deren Quadrat 4 ist, nämlich -2 und 2. Bei der Umkehrung, dem Wurzelziehen, entscheiden wir uns für die positive Zahl, also 2, und legen fest: $\sqrt{4} = 2$.

Ähnliche Mehrdeutigkeiten gibt es auch für den Tangens und den Cotangens.

Wie die Winkelfunktionen sind auch die Arcusfunktionen nicht voneinander unabhängig. So besteht beispielsweise zwischen der Arcus Sinus- und der Arcus Cosinus-Funktion die Identität

$$\operatorname{asin}(x) + \operatorname{acos}(x) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \tag{5.1}$$

für alle x zwischen -1 und 1. (Überlegen Sie, warum!)

6 Graphen der Winkelfunktionen

Um die Werte und Vorzeichen der Winkelfunktionen, ihre Periodizität, die Verwandtschaftsverhältnisse für Winkel, die unterschiedlichen Quadranten am Einheitskreis entsprechen, und die Monotonieeigenschaften dieser Funktionen schnell zu überblicken, ist die grafische Darstellung die geeignetste. Wie die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion aussehen, ergibt sich qualitativ durch ihre Darstellung am Einheitskreis (Abbildung 4): Während P einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis läuft, α daher um 360° oder $2\,\pi$ zunimmt, wachsen bzw. fallen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ je nachdem, in welchem Quadranten sich P gerade befindet. Liegt P auf einer Koordinatenachse, so ist einer der beiden Werte 0 und der andere -1 oder 1, sodass die Graphen ein „Auf und Ab“ zwischen den Werten -1 und 1 (oder, wenn man sich α als Zeit vorstellt, das Verhalten von „Schwingungen“) zeigen. Der Tangens (als Quotient „Sinus durch Cosinus“ bzw. als Anstieg der Trägergeraden von OP) kann beliebige Werte annehmen und ist dann, wenn P auf der zweiten Achse liegt, nicht definiert. Der Cotangens (als „1 durch Tangens“) kann ebenfalls beliebige Werte annehmen und ist dann, wenn P auf der ersten Achse liegt, nicht definiert.

Die Graphen dieser vier Funktionen sind in Abbildung 7 gezeigt. Da der Winkel (die unabhängige, auf der ersten Achse aufgetragene Variable) im Zusammenhang mit den Graphen meist im Bogenmaß angegeben wird, machen wir das auch so. Stellen wir die wichtigsten Eigenschaften, die sich aus den Verläufen der Graphen ergeben (und die wir zum Teil bereits gefunden haben), zusammen:

- Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen mit Periode $2\,\pi$. Tangens und Cotangens sind periodische Funktionen mit Periode π.
- Sinus und Cosinus nehmen Werte zwischen -1 und 1 an. Tangens und Cotangens können beliebige reelle Werte annehmen.
- Die Graphen von Sinus und Cosinus sind zueinander in Richtung der ersten Achse verschoben, haben aber ansonsten die gleiche Form. Das entspricht der Identität

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha, \tag{6.1}$$

  die wir – nun im Bogenmaß ausgedrückt – aus (2.16) und (3.9) erhalten. Sie besagt, dass wir den Graphen der Sinusfunktion erhalten, indem wir den Graphen der Cosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschieben. Wir können sie auch in der Form

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.2}$$

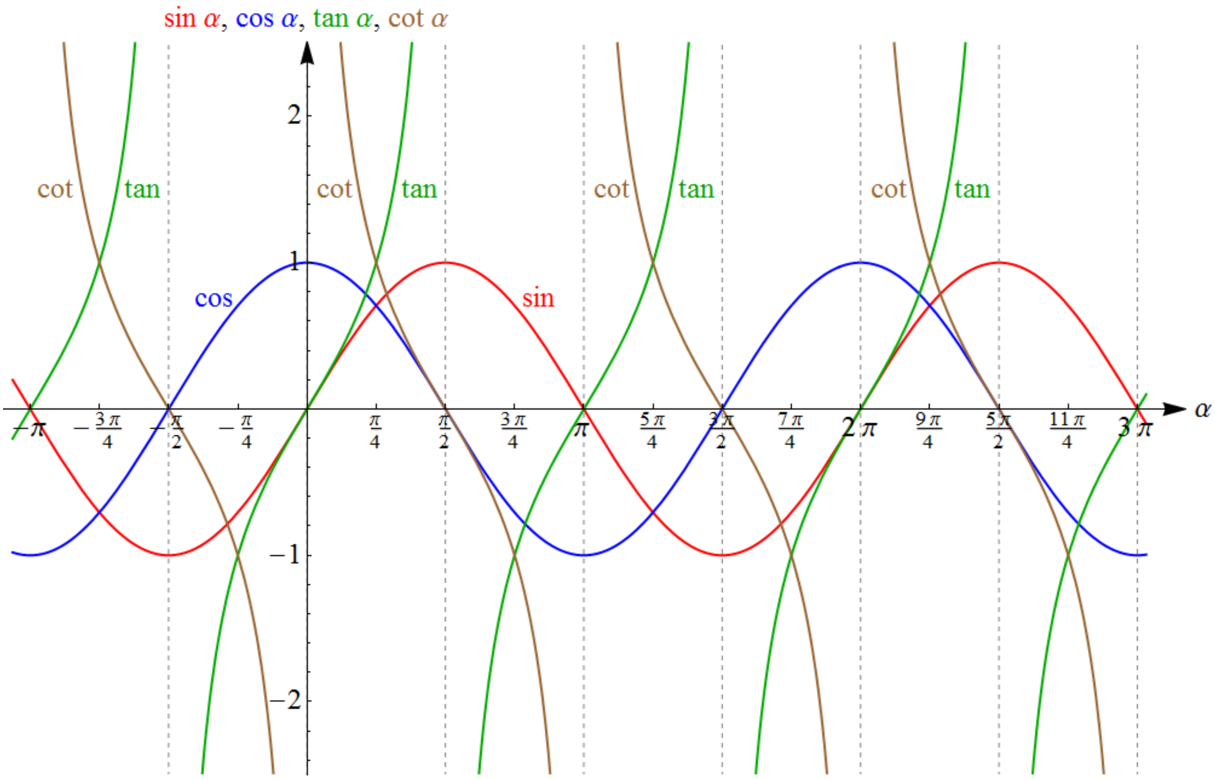


Abbildung 7: Die Graphen der vier Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens. Die unabhängige Variable (der Winkel α) ist im Bogenmaß angegeben.

anschreiben, was besagt, dass wir den Graphen der Cosinusfunktion erhalten, indem wir den Graphen der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschieben.

- Die Nullstellen der Sinusfunktion liegen bei allen ganzzahligen Vielfachen von π. Die Nullstellen der Cosinusfunktion sind entsprechend verschoben. Wo eine der beiden Funktionen eine Nullstelle hat, hat die andere ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

- Die strichlierten „vertikalen" Hilfslinien in Abbildung 7 bei den ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ (also $90°$) markieren jene Winkel, für die der Tangens oder der Cotangens nicht definiert ist. Sie sind Asymptoten der entsprechenden Graphenstücke.

- Die Graphen der Winkelfunktionen zeigen, dass es für keine von ihnen eine globale Umkehrfunktion gibt. Ist etwa ein Winkel gesucht, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2}$ ist, so entspricht das der Gleichung $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Um sie grafisch zu lösen, müssen wir die Schnittpunkte des Graphen der Sinusfunktion mit jener („horizontalen", also zur ersten Achse parallelen) Geraden, deren zweite Koordinate überall gleich $\frac{1}{2}$ ist, ermitteln. Klarerweise gibt es unendlich viele Lösungen, von denen zwei im Bereich zwischen 0 und $\pi = 180°$ liegen, nämlich $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$ und $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 150°$, wie wir bereits früher festgestellt haben. Ähnliches gilt auch für die anderen Winkelfunktionen.

7 Abkömmlinge der Sinus- und der Cosinusfunktion

Die im vorigen Abschnitt besprochenen Graphen legen es nahe, Schwingungsvorgänge (wie etwa den zeitlichen Verlauf einer Wechselspannung) durch die Sinus- oder Cosinusfunktion zu beschreiben[20]. Dazu lassen wir den Winkel α gemäß $\alpha = \omega\, t$ von der Zeit t abhängen (wie wir das bereits früher bei der Betrachtung der gleichmäßigen Bewegung eines Punktes auf dem Einheitskreis gemacht haben). Hängt eine Größe s gemäß

$$s(t) = A\,\sin(\omega\, t) \tag{7.1}$$

von der Zeit ab, wobei A eine positive Konstante ist, so sprechen wir von einer **harmonischen Schwingung**. Die Konstante ω wird in diesem Zusammenhang *Kreisfrequenz* genannt[21], die Konstante A heißt *Amplitude*. Die *Periodendauer*, d.h. die Zeit, während der eine vollständige Periode durchlaufen wird, ist durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gegeben, die *Frequenz*[22] durch $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Wollen wir (7.1) durch die Frequenz oder durch die Periodendauer ausdrücken, so können wir stattdessen auch eine der beiden Formen

$$s(t) = A\,\sin(2\,\pi\, f\, t) = A\,\sin\left(\frac{2\,\pi}{T}\, t\right) \tag{7.2}$$

benutzen. Etwas allgemeiner als (7.1) können wir zur Beschreibung einer Schwingung

$$s(t) = A\,\sin(\omega\, t + \delta) \tag{7.3}$$

ansetzen, wobei δ die *Anfangsphase* ist, da der Term $\omega\, t + \delta$, von dem die Sinusfunktion gebildet wird, zur (Anfangs-)Zeit $t = 0$ den Wert δ hat[23].

Treten in einer Anwendungssituation mehrere durch Funktionen der Form (7.3) beschriebene Schwingungen (z.B. Wechselspannungen und Wechselströme) mit unterschiedlichen Amplituden, Frequenzen und Anfangsphasen auf, so ist es nützlich, ein bisschen über die Graphen solcher Funktionen zu wissen. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) bezeichnen wir die unabhängige Variable im Folgenden mit t. Wir können uns t als Zeit vorstellen. Um uns nicht

---

[20] Ob man lieber die Sinusfunktion oder die Cosinusfunktion dafür verwendet, ist Geschmackssache, da die beiden Funktionen – wie (6.1) und (6.2) zeigen – ja nur um $\frac{\pi}{2}$ „versetzte" Versionen voneinander sind.

[21] Sie misst, wie schnell sich der Winkel, von dem der Sinus gebildet wird, also $\omega\, t$, mit der Zeit ändert. Eine ganz ähnliche Situation haben wir bereits früher in diesem Skriptum erwähnt (blättern Sie zurück!): Auch beim gleichmäßigen Umlauf eines Punktes auf dem Einheitskreis tritt ein Winkel auf, der proportional zur Zeit anwächst. Die dort aufgetretene Konstante, die Winkelgeschwindigkeit, wurde mit dem gleichen Symbol ω bezeichnet, da sie in formaler Hinsicht die gleiche Rolle spielt wie hier die Kreisfrequenz.

[22] Dass der Zusammenhang zwischen Frequenz und Periodendauer durch $f = \frac{1}{T}$ gegeben ist, können Sie sich so überlegen: Während einer Periodendauer T wird 1 Schwingung ausgeführt. Werden in einer Sekunde 10 komplette Schwingungen ausgeführt, so dauert eine Schwingung $\frac{1}{10}$ Sekunde. In dieser Situation ist $T = \frac{1}{10}\,\mathrm{s}$ und $f = 10$ Schwingungen pro Sekunde oder $10\,\mathrm{Hz}$, wobei Hz (für *Hertz*, nach Heinrich Hertz, 1857 – 1894) die zur Angabe von Frequenzen verwendete Abkürzung von s^{-1} ist. Für Winkelgeschwindigkeiten wird diese Abkürzung übrigens nicht empfohlen, obwohl sie theoretisch möglich wäre.

[23] In Physik und Technik wird das Argument einer Sinus- oder Cosinusfunktion, im Fall (7.1) also $\omega\, t$, im Fall (7.3) $\omega\, t + \delta$, oft als *Phase* bezeichnet, insbesondere dann, wenn es sich nicht um einen geometrischen Sachverhalt handelt, in dem das Wort „Winkel" angebracht wäre. Im Laufe einer kompletten Periode (d.h. einer vollständigen Schwingung) wächst die Phase um $2\,\pi$.

mit physikalischen Einheiten herumzuschlagen, behandeln wir t als dimensionslos[24]. Nun betrachten wir die durch

$$f_0(t) = \sin t \tag{7.4}$$
$$f_1(t) = 2\,\sin t \tag{7.5}$$
$$f_2(t) = \sin(3\,t) \tag{7.6}$$
$$f_3(t) = 2\,\sin(3\,t) \tag{7.7}$$
$$f_4(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right) \tag{7.8}$$
$$f_5(t) = 2\,\sin\left(3\,t - \frac{\pi}{8}\right) \tag{7.9}$$

definierten Funktionen $f_0, \ldots, f_5$, besprechen ihre Eigenschaften und sehen uns ihre (in Abbildung 8 gezeigten) Graphen an[25].

- f_0 ist die Sinusfunktion, deren Graph bereits in Abbildung 7 dargestellt wurde. Wie wir bereits wissen, ist sie periodisch mit Periode $2\,\pi$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) können wir ihr die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\,\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\,\pi$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zuschreiben. Aus ihren Eigenschaften ergeben sich jene der Funktionen f_1 bis f_5.
- Die Werte der Funktion f_1 sind an jeder Stelle t doppelt so groß wie jene der Sinusfunktion f_0. Der Graph von f_1 geht aus jenem von f_0 hervor, indem dieser in die Richtung der zweiten Achse um den Faktor 2 gestreckt wird. f_1 ist periodisch mit Periode $2\,\pi$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_1 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\,\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\,\pi$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.
- Der Wert der Funktion f_2 an einer Stelle t ist gleich dem Wert der Sinusfunktion f_0 an der Stelle $3\,t$, die also dreimal so weit vom Nullpunkt entfernt liegt wie t. Daher geht der Graph von f_2 aus jenem von f_0 hervor, indem dieser in die Richtung der ersten Achse um den Faktor $\frac{1}{3}$ gestaucht wird. f_2 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_2 die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\,\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.
- Die Funktion f_3 wird aus der Sinusfunktion f_0 durch eine Verdopplung der Amplitude und eine Verdreifachung der Kreisfrequenz erhalten. f_3 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$.

[24] Physikalisch wird die Zeit natürlich in einer Zeiteinheit gemessen, z.B. in Sekunden. Daraus ergibt sich die Einheit der Kreisfrequenz als Sekunde^{-1} (s^{-1}). Das ist die gleiche Einheit, in der wir die Frequenz messen, und es ist auch die gleiche Einheit, die wir bereits früher für die Winkelgeschwindigkeit identifiziert haben, siehe die Fußnoten 13 und 22. Wenn wir vereinbaren, dass t die „Zahl der Sekunden" darstellt, wird t zu einer dimensionslosen Variable. Die Zeit, die einem konkreten Wert von t entspricht, ist dann genau genommen nicht t, sondern „t Sekunden". Als Folge werden dann die Größen ω und f ebenfalls dimensionslos: Die Winkelgeschwindigkeit ist „$\omega\,\mathrm{s}^{-1}$", die Frequenz ist „$f\,\mathrm{Hz}$".

[25] Im Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen* wurde anhand der quadratischen Funktionen vorgeführt, wie die Graphen von Funktionen gewonnen werden, die aus einer bekannten Funktion durch derartige Transformationen hervorgehen. Wenn Sie sich nicht mehr daran erinnern, lesen Sie die entsprechenden Stellen noch einmal durch!

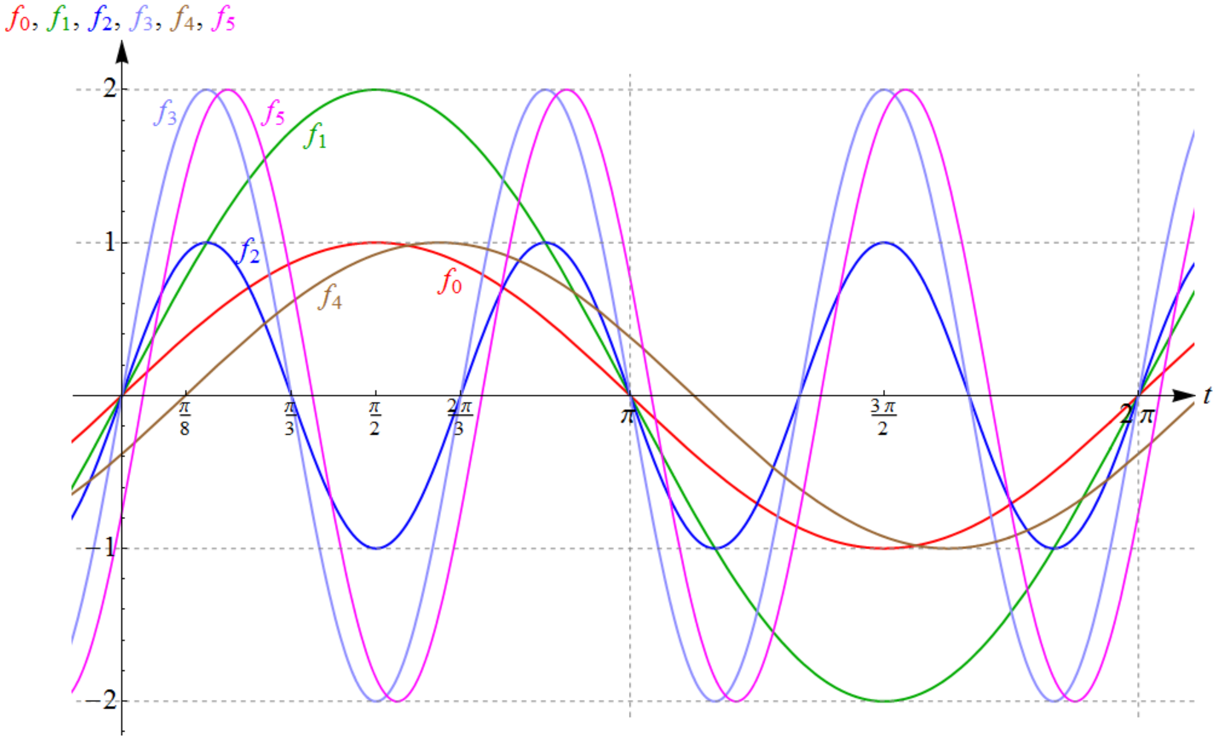


Abbildung 8: Die Graphen der in (7.4) – (7.9) definierten Funktionen.

Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_3 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = 0$ zu.

- Der Wert der Funktion f_4 an einer Stelle t ist gleich dem Wert der Sinusfunktion f_0 an der Stelle $t - \frac{\pi}{8}$, der also um $\frac{\pi}{8}$ weiter links liegt als t. Daher geht der Graph von f_4 aus jenem von f_0 hervor, indem dieser um $\frac{\pi}{8}$ in Richtung der ersten Achse (d.h. nach rechts) verschoben wird. f_1 ist periodisch mit Periode 2π. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_4 die Amplitude $A = 1$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ (daher die Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = 2\pi$) und die Anfangsphase $\delta = -\frac{\pi}{8}$ zu. Wir sagen, das f_0 und f_4 zueinander *phasenverschoben* sind. Ein Check ergibt sich, indem wir die kleinste positive Nullstelle von f_4 am Graphen ablesen: Sie liegt bei $t = \frac{\pi}{8}$. Die Rechnung bestätigt: $f_4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin 0 = 0$.

- Die Funktion f_5 wird aus der Sinusfunktion f_0 durch eine Verdopplung der Amplitude, eine Verdreifachung der Kreisfrequenz und eine Phasenverschiebung um $-\frac{\pi}{8}$ erhalten. f_5 ist periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{3}$. Im Hinblick auf die allgemeine Form (7.3) schreiben wir f_5 die Amplitude $A = 2$, die Kreisfrequenz $\omega = 3$ (daher die Frequenz $f = \frac{3}{2\pi}$ und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{3}$) und die Anfangsphase $\delta = -\frac{\pi}{8}$ zu. Die Funktionen f_5 und f_3 besitzen die gleiche Amplitude und die gleiche Kreisfrequenz. Sie unterscheiden sich nur durch den Wert der Anfangsphase δ, sind daher zueinander phasenverschoben. Ihre Phasenverschiebung beträgt $\frac{\pi}{8}$. Dementsprechend sind sie auch *zeitverschoben*. Wenn wir f_5 und f_3 als von einem Empfänger gemessene Signale interpretieren, kommt das durch f_3 beschriebene Signal ein bisschen früher an als das durch f_5 beschriebene. Um den Wert der Zeitverschiebung zu ermitteln, formen wir $3\,t-\frac{\pi}{8}$ zu $3\,\left(t-\frac{\pi}{24}\right)$ um. Daraus ergibt sich, dass der Graph von f_5 aus jenem von f_3 durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{24}$ in Richtung der ersten Achse (d.h. nach rechts oder „später") hervorgeht.

Die Klasse der Funktionen vom Typ (7.3) wird auch als „allgemeine Sinusfunktion" bezeichnet. Analog dazu können wir zur Beschreibung von Schwingungen auch die Cosinusfunktion benutzen und

$$s(t) = A\,\cos(\omega\,t+\delta') \tag{7.10}$$

schreiben. Aus (6.1) folgt, dass (7.10) die gleiche Schwingung wie (7.3) beschreibt, wenn $\delta' = \delta - \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird. Eine dritte, zu (7.10) und (7.3) gleichwertige Form der Beschreibung von Schwingungen besteht darin, $s(t)$ als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion, beide ohne δ's, anzusetzen:

$$s(t) = B\,\sin(\omega\,t) + C\,\cos(\omega\,t). \tag{7.11}$$

Die Amplitude der Schwingung ist in dieser Darstellungsform durch $\sqrt{B^2+C^2}$ gegeben. (7.11) beschreibt die gleiche Schwingung wie (7.3), wenn $A=\sqrt{B^2+C^2}$ gesetzt und δ geeignet gewählt wird.

8 Sinus und Tangens für kleine Winkel

Für Winkel α, die im Bogenmaß angegeben sind und deren Betrag sehr viel kleiner als 1 ist, gilt

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha. \tag{8.1}$$

Das ist eine in vielen Situationen nützliche Näherung, die aus der in Abbildung 9 wiedergegebenen Skizze hervorgeht. Ist $|\alpha| < 0.1$ (was im Gradmaß $|\alpha| < 6°$ entspricht), so ist der relative Fehler kleiner als ein halbes Prozent.

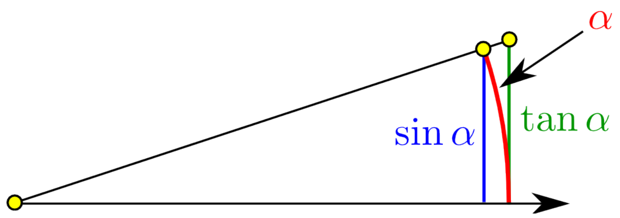


Abbildung 9: Ein im Bogenmaß angegebener Winkel α ist gleich der Länge des Bogens am Einheitskreis (rot). Je kleiner der Betrag von α, umso ähnlicher sind $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ und α.

Dass für kleine Winkel $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ gilt, drückt sich in Abbildung 7 dadurch aus, dass die Graphen der Sinus- und der Tangensfunktion bei $\alpha = 0$ zueinander tangential sind.

9 Sekans und Cosekans

Zwei Winkelfunktionen, die vor allem im englischsprachigen Raum benutzt werden und die Ihnen vielleicht einmal bei der Ausgabe eines Computeralgebrasystems oder in der Literatur begegnen, sind:

Der **Sekans** (Betonung auf dem „e“) eines Winkels α ist definiert durch

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,, \tag{9.1}$$

der **Cosekans** (Betonung auf dem „o“) eines Winkels α ist definiert durch

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\,. \tag{9.2}$$

10 Additionstheoreme

Zum Abschluss erwähnen wir noch, dass es zahlreiche Identitäten gibt, in denen Winkelfunktionen von Summen und Summen von Winkelfunktionen vorkommen. Die wichtigsten dieser **Additionstheoreme** (oder **Summensätze**) lauten:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \tag{10.1}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \tag{10.2}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{10.3}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{10.4}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{10.5}$$

Sie gelten für beliebige Winkel α und β (ausgenommen in (10.3) jene Werte, für die eine der auftretenden Tangensfunktionen nicht definiert ist).

> Beispiel für eine praktische Anwendung: Aus (10.1) folgt mit $\alpha = \omega\,t$ und $\beta = \delta$, dass eine in der Form (7.3) beschriebene harmonische Schwingung auch in der Form (7.11) angeschrieben werden kann. Es folgen dann mit $B = A\,\cos\delta$ und $C = A\sin\delta$ die Umrechnungsformeln zwischen den Konstanten (A,δ) und den Konstanten (B,C).

Mit $\beta = \alpha$ erhalten wir aus (10.1) und (10.2) die Identitäten

$$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha \tag{10.6}$$

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{10.7}$$

die oft verwendet werden, um Ausdrücke, die Winkelfunktionen enthalten, zu vereinfachen.

11 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Berechnen Sie (näherungsweise, auf 4 signifikante Stellen genau) die durch Symbole in rot bezeichneten Seiten und Winkel in Abbildung 10! Geben Sie die gesuchten Winkel auch im Bogenmaß an!

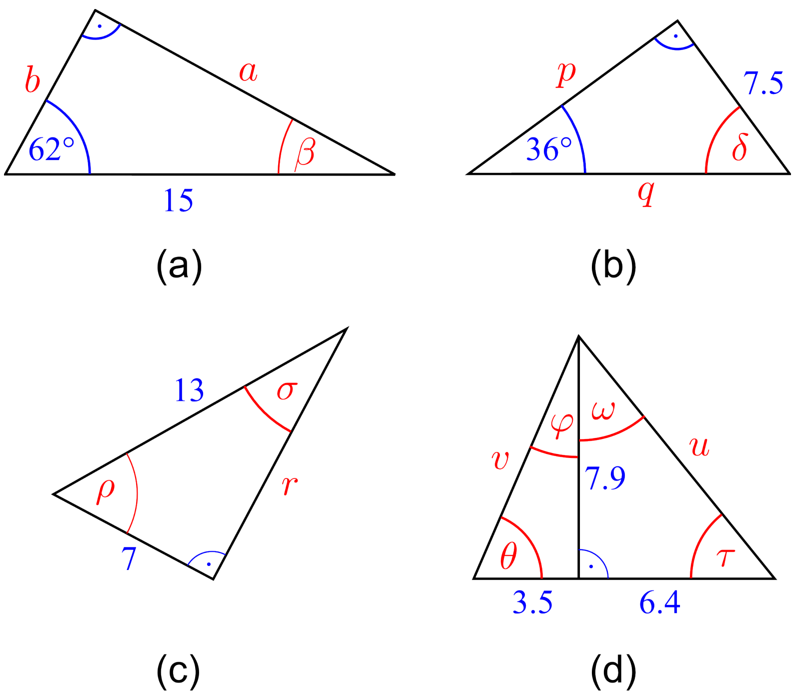


Abbildung 10

Lösungen:

(a) $\beta = 28° \approx 0.4887$, $a \approx 13.24$, $b \approx 7.042$.
(b) $\delta = 54° \approx 0.9425$, $q \approx 12.76$, $p \approx 10.32$.
(c) $r \approx 10.95$, $\sigma \approx 32.58° \approx 0.5686$, $\rho \approx 57.42° \approx 1.002$.
(d) $v \approx 8.641$, $u \approx 10.17$, $\theta \approx 66.10° \approx 1.154$, $\varphi \approx 23.90° \approx 0.4170$
$\omega \approx 39.01° \approx 0.6809$, $\tau \approx 50.99° \approx 0.8899$.

- Beweisen Sie (2.19) und (2.20)! Tipp: Sie müssen dazu nur ein gleichseitiges Dreieck betrachten und den Satz von Pythagoras benutzen!
  Weiterer Tipp:

  Zeichnen Sie eine Höhenlinie ein! Sie zerlegt das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinkelige Dreiecke. Welche Winkel treten in ihnen auf? Berechnen Sie nun die Höhe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und wenden Sie (2.3) und (2.5) an!

- Eine Straße hat eine Steigung von 12%. Welchen Winkel bildet sie mit der Horizontalen?
  Lösung:

  $$\alpha = \operatorname{atan}(0.12) \approx 0.1194 \approx 6.84°.$$

- Geben Sie (ohne elektronisches Hilfsmittel, auch ohne Blick in dieses Skiptum) die Vorzeichen von $\sin(220°)$, $\sin(2.58)$, $\cos(100°)$, $\cos(1.1)$, $\tan(130°)$ und $\tan(3.6)$ an!
  Lösung:

  Die Vorzeichen wechseln einander ab, beginnend mit einem Minus.

- Drücken Sie $\sin(\alpha + 180°)$ durch $\sin\alpha$ aus!
  Lösung:

  $$\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha.$$
  Ersetzen Sie in (3.6) α durch $-\alpha$ und benutzen Sie (3.8)!

- Argumentieren Sie mit Hilfe des Graphen der Cosinusfunktion und des Graphen der Funktion $x \mapsto x$, dass die Gleichung $\cos x = x$ genau eine Lösung besitzt!
  Lösung:

  Der Graph der Funktion $x \mapsto x$ ist die Gerade durch den Ursprung mit Anstieg 1. Sie besitzt mit dem Graphen der Cosinusfunktion genau einen Schnittpunkt.

- Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie die in der „allgemeinen Sinusfunktion" (7.3) vorkommenden Konstanten (Parameter) A, ω und δ den Graphen beeinflussen, legen Sie in *GeoGebra* für jede dieser Konstanten einen Schieberegler an, geben Sie den Funktionsterm ein und variieren Sie die Werte der Konstanten! Benutzen Sie diese Methode, um sich die Graphen der Funktionen

  $$\begin{aligned} g_1(t) &= 4\,\sin t \\ g_2(t) &= 0.2\,\sin t \\ g_3(t) &= \sin(0.1\,t) \\ g_4(t) &= \sin(10\,t) \\ g_5(t) &= \sin(t - 0.6) \\ g_6(t) &= 4\,\sin(0.5\,t - 0.6) \end{aligned}$$

  anzusehen!

- Benutzen Sie (10.7), um eine Formel aufzustellen, die $\cos(2\,\alpha)$ durch $\sin\alpha$ ausdrückt und für beliebige Winkel gilt!
  Lösung:

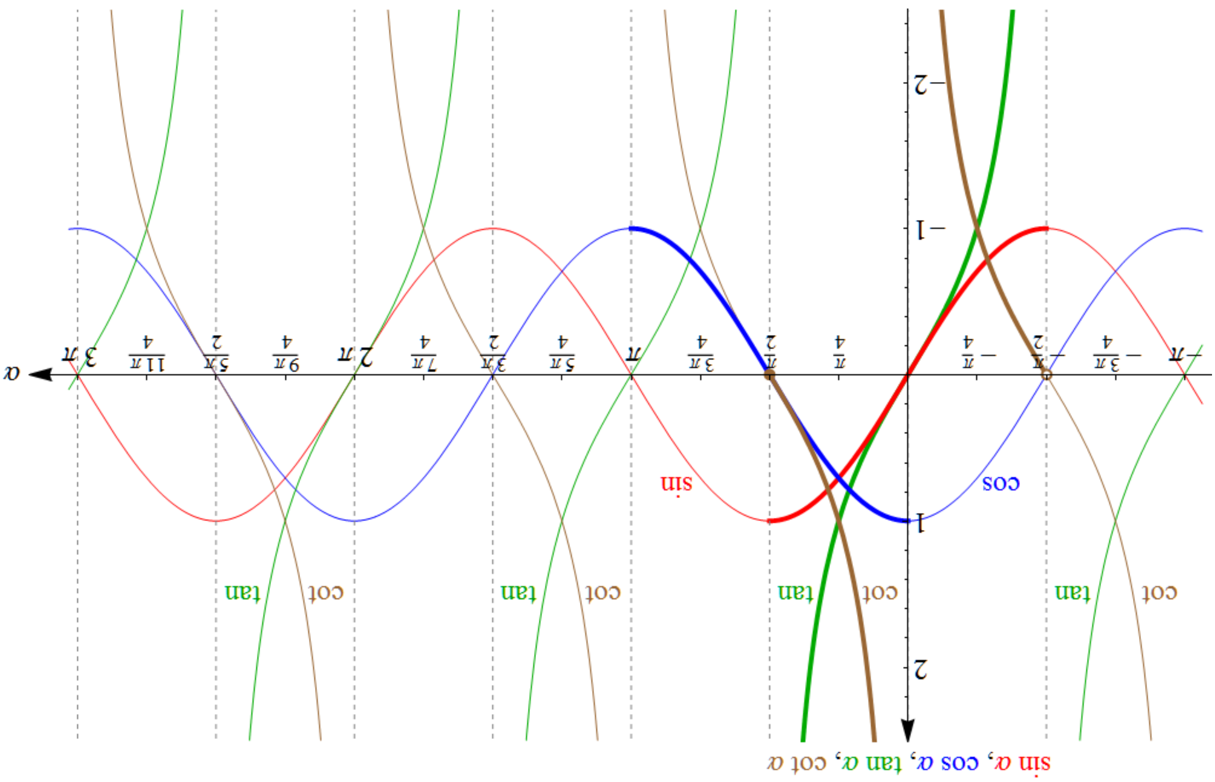
$$\cos(2\,\alpha) = 1 - 2\,\sin^2\alpha$$

- Benutzen Sie (10.6), um eine Formel aufzustellen, die $\sin(2\,\alpha)$ durch $\sin\alpha$ ausdrückt und für alle Winkel zwischen $-90°$ und $90°$ gilt!
  Lösung:

$$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

- Nehmen Sie einen Ausdruck von Abbildung 7 (oder zeichnen Sie die Graphen mit der Hand nach) und ziehen Sie jene Teile der Graphen dick nach, die für die jeweilige Umkehrfunktion relevant sind! (Mit anderen Worten: Auf welche Definitionsmenge muss beispielsweise die Sinusfunktion eingeschränkt werden, damit jede Gleichung der Form $\sin\alpha = c$ für ein c zwischen -1 und 1 den Winkel $\alpha = \operatorname{asin}(c)$ als einzige Lösung besitzt?) Diese Aufgabe ist wichtig, um zu verstehen, was ein Rechner ausgibt, wenn eine Arcusfunktion ausgeführt wird!

  Lösung:



- Von zwei Musikinstrumenten, von denen eines ein bisschen verstimmt ist, gehen Töne mit leicht unterschiedlichen Frequenzen aus. Die beiden akustischen Signale „überlagern" einander. Mathematisch gesprochen werden sie addiert, was durch die Funktion

$$s(t) = \sin(9\,t) + \sin(10\,t)$$

modelliert wird. Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion (z.B. mit *GeoGebra*)! Wie würden Sie beschreiben, was man hört?
Lösung:

Es handelt sich um eine *Schwebung*.
Man hört einen Ton der Kreisfrequenz 9.5, dessen Lautstärke variiert,
ein so genanntes *amplitudenmoduliertes* Signal.

- Winkel (aber auch andere Größen in Technik und Naturwissenschaft) werden oft mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Machen Sie sich mit dem griechischen Alphabet – etwa mit Hilfe der Seite http://de.wikipedia.org/wiki/Griechisches_Alphabet – vertraut! Sie sollten Symbole wie μ, ν, ψ, ϕ (oder φ), θ (oder ϑ), ε, ξ, η, ζ, χ, Σ oder Π richtig benennen und auch richtig schreiben können!

- Legen Sie eine Formelsammlung mit den Ihnen am wichtigsten erscheinenden Beziehungen für Winkelfunktionen an! Sie wird Ihnen in Ihrem Studium gute Dienste leisten!

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über Winkelfunktionen und ihre Eigenschaften zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/mit_winkelfunktionen_rechnen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

Abbildung 6 ist der Darstellung im Skriptum *Mathematik 1* von Thomas Sturm (München, 2009) nachempfunden und wurde im April 2020 eingefügt.