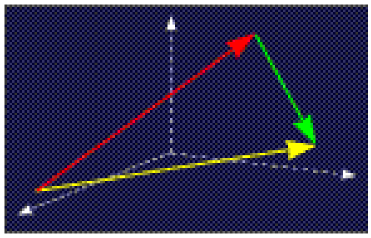
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Absolutbetrag

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden das Konzept des Absolutbetrags einer reellen Zahl und der Abstand von Zahlen als Absolutbetrag ihrer Differenz besprochen.

1 Absolutbetrag als „Abstand vom Nullpunkt“

Werden die reellen Zahlen geometrisch auf der Zahlengeraden dargestellt, so liegen die negativen Zahlen links vom Nullpunkt und die positiven Zahlen rechts vom Nullpunkt.

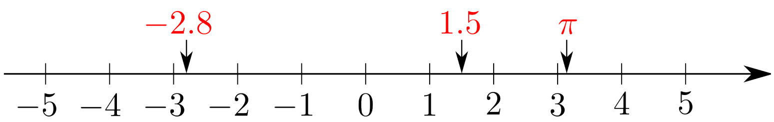


Abbildung 1: Skizze der Zahlengeraden mit einigen ausgewählten reellen Zahlenwerten.

Den **Absolutbetrag** (kurz **Betrag**) einer reellen Zahl können wir uns zunächst als ihren *Abstand vom Nullpunkt* auf der Zahlengeraden vorstellen. Den Absolutbetrag einer reellen Zahl x schreiben wir als $|x|$. Der Absolutbetrag von 0 ist gleich 0 (da der Nullpunkt den Abstand 0 von sich selbst hat), d.h.

$$|0| = 0. \tag{1.1}$$

Der Absolutbetrag von 5 ist gleich 5, d.h.

$$|5| = 5. \tag{1.2}$$

Der Absolutbetrag von -5 ist ebenfalls gleich 5, d.h.

$$|-5| = 5. \tag{1.3}$$

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl kann niemals negativ sein, und die einzige reelle Zahl, deren Absolutbetrag gleich 0 ist, ist 0 selbst. Für jede andere reelle Zahl gehen wir so vor: Ist

x positiv, so ist der Absolutbetrag von x gleich x. Ist x negativ, so hat x in der Darstellung als Zahl ein negatives Vorzeichen, und um den Absolutbetrag zu erhalten, lassen wir dieses einfach weg.

Auf diese Weise gibt uns der Absolutbetrag Auskunft darüber, wie nahe eine reelle Zahl auf der Zahlengeraden dem Nullpunkt ist, wobei uns egal ist, ob es sich um eine positive Zahl (rechts vom Nullpunkt) oder um eine negative Zahl (links vom Nullpunkt) handelt.

2 Formale Definition

Die Formulierung „Vorzeichen weglassen" bei der Ermittlung des Absolutbetrags einer negativen Zahl ist nicht sehr befriedigend. Um diese Vorgangsweise stattdessen durch die Grundrechnungsarten auszudrücken, bemerken wir, dass die „Gegenzahl"[1] einer positiven Zahl negativ und die „Gegenzahl" einer negativen Zahl positiv ist. Daraus folgt, dass der Absolutbetrag einer negativen Zahl x gleich $-x$ ist:

$$\text{Ist } x < 0, \text{ so ist } |x| = -x. \tag{2.1}$$

Lassen Sie sich vom Minuszeichen in dieser Aussage nicht verwirren! Der Absolutbetrag kann nie negativ sein, auch nicht, wenn er in dieser Weise angeschrieben wird. Nehmen wir als Beispiel für x die Zahl -5. Ihre „Gegenzahl" ist $-(-5)$, also gleich 5, und das ist auch der Absolutbetrag von -5. Da in (2.1) vorausgesetzt ist, dass die Zahl x negativ ist, trägt sie in der Darstellung als Zahl ein Minuszeichen, das in (2.1) nicht sichtbar ist! Für $x = -5$ können wir (2.1) in der folgenden Weise anwenden:

$$\text{Da } -5 < 0 \text{ ist, gilt } |-5| = -(-5) = 5. \tag{2.2}$$

Um nun den Absolutbetrag x einer beliebigen reellen Zahl formal zu definieren, unterscheiden wir die zwei Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$. Falls $x \geq 0$ ist, ist $|x|$ gleich x. Falls $x < 0$ ist, ist $|x|$ gleich $-x$. Das schreiben wir in der folgenden Form an:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Damit ist der Absolutbetrag offiziell und in der gebührenden mathematischen Strenge definiert.

Die Definition (2.3) gilt auch dann, wenn x durch einen Ausdruck ersetzt wird, der seinerseits reelle Werte annehmen kann. So gilt beispielsweise für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{wenn } 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3) & \text{wenn } 2x-3 < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Das können wir vereinfachen, indem wir (auch ohne viel Theorie) bedenken,

[1] Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre „Gegenzahl". -5 ist die „Gegenzahl" von 5, und 5 ist die „Gegenzahl" von -5. Die Zahl 0 ist, wenn man so will, ihre eigene Gegenzahl. Siehe dazu das Skriptum *Rechengesetze für die Grundrechnungsarten*.

- dass $-(2x-3) = -2x+3$ ist,
- dass $2x-3 \geq 0$ genau dann gilt, wenn $2x \geq 3$ und damit $x \geq \frac{3}{2}$ ist
- und dass $2x-3 < 0$ genau dann gilt, wenn $2x < 3$ und damit $x < \frac{3}{2}$ ist.

Damit nimmt (2.4) die übersichtlichere Form

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{wenn } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{wenn } x < \frac{3}{2} \end{cases} \tag{2.5}$$

an. Beim Lösen bestimmter Typen von Gleichungen und Ungleichungen ist es hilfreich, die Abfolge von Schritten

(2.3) [sich an die Definition des Absolutbetrags erinnern]
→ (2.4) [die Definition auf einen Ausdruck anwenden]
→ (2.5) [vereinfachen]

flüssig durchführen zu können.

3 Abstand als Absolutbetrag einer Differenz

Eine besonders wichtige Anwendung dieses Konzepts ergibt sich, wenn wir nach dem *Abstand zweier Zahlen* auf der Zahlengeraden fragen. Seien also a und b zwei unterschiedliche reelle Zahlen. Ihr Abstand ist gleich der Differenz „größere Zahl minus kleinere Zahl". Aber welche ist die größere, welche die kleinere Zahl? In manchen Fällen wissen wir das nicht oder wollen es nicht voraussetzen. Wenn wir $a-b$ und $b-a$ berechnen, so ist eine dieser beiden Differenzen positiv und die andere negativ. Aber da sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben sie den gleichen Absolutbetrag, und dieser ist gleich der positiven der beiden Differenzen. Damit ist das Problem gelöst: Der gesuchte Abstand ist $|a-b|$ (oder $|b-a|$, was das Gleiche ist)!

Der **Abstand** zweier Zahlen auf der Zahlengeraden ist daher gleich dem **Absolutbetrag ihrer Differenz**, wobei es gleichgültig ist, welche der beiden Zahlen wir von welcher subtrahieren. Betrachten wir ein Beispiel: Den Abstand der Zahlen -3 und 4 können wir entweder in der Form

$$|-3-4| = |-7| = 7 \tag{3.1}$$

oder in der Form

$$|4-(-3)| = |7| = 7 \tag{3.2}$$

berechnen. Ein Blick auf eine Skizze der Zahlengeraden bestätigt dieses Ergebnis:

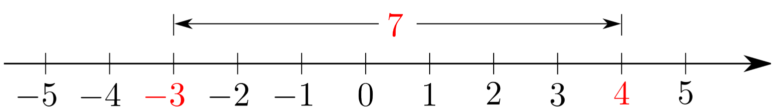


Abbildung 2: Der Abstand der Zahlen -3 und 4 auf der Zahlengeraden ist gleich 7.

Das Konzept des Abstands von Zahlen ist insbesondere dann wichtig, wenn von zwei Zahlen gesagt werden soll, dass sie nahe beieinander liegen (egal, welche von ihnen die größere ist).

Um beispielsweise auszudrücken, dass der Abstand der Zahlen x und y höchstens $\frac{1}{10}$ beträgt, schreiben wir einfach

$$|x-y| \le \frac{1}{10}. \tag{3.3}$$

Ein anderes Beispiel: Die Menge aller reellen Zahlen x, deren Abstand von der Zahl 5 kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, kann formal beschrieben werden als Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die

$$|x-5| < \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

erfüllen. Das sind genau jene Zahlen, für die $\frac{9}{2} < x < \frac{11}{2}$ (oder, in Dezimaldarstellung angeschrieben, $4.5 < x < 5.5$) gilt.

Die Verwendung des Absolutbetrags erlaubt es, derartige Aussagen in kompakter Weise zu formulieren, anzuschreiben, mit ihnen zu argumentieren und zu rechnen, ohne sich im Einzelnen um die Vorzeichen kümmern zu müssen, auf die es ohnehin nicht ankommt. Müssen in einer praktischen Anwendung viele Bedingungen vom Typ (3.3) oder (3.4) überprüft werden, so können wir Computerprogramme anweisen, diese Dinge für uns zu erledigen, sofern wir ihnen einmal beigebracht haben, wie sie den Absolutbetrag einer Zahl berechnen.

4 Rechengesetze und Eigenschaften

Zuletzt schreiben wir noch einige den Absolutbetrag betreffende Rechengesetze und Eigenschaften formal an. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x\,y| = |x|\,|y| \tag{4.1}$$

und, sofern $y \neq 0$ ist,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,. \tag{4.2}$$

Weiters gilt[2]

$$|-x| = |x|. \tag{4.3}$$

Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $a \in \mathbb{R}$ nichtnegativ (also $a \ge 0$), so gilt

$$|a\,x| = a\,|x|. \tag{4.4}$$

(Beispielsweise gilt stets $|2x| = 2|x|$.) Weiters gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ die **Dreiecksungleichung**

$$|x+y| \le |x| + |y|. \tag{4.5}$$

[2] Bitte machen Sie sich klar, dass die Formel $|-x| = x$ *nicht* für alle reellen Zahlen x gilt! Sie gilt nur dann, wenn $x \ge 0$ ist.

Zuletzt noch ein kleiner Vorgriff auf den Wurzelbegriff[3]: Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt{x^2} = |x| \,. \tag{4.6}$$

Der Absolutbetrag auf der rechten Seite ist hier nötig, wenn x negativ ist. Für das Beispiel $x = -3$ sieht das so aus: Es gilt $(-3)^2 = 9$, und die Wurzel aus 9 ist 3, was gleich dem Betrag von -3 ist, kurz angeschrieben also: $\sqrt{(-3)^2} = |-3|$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[3] Siehe dazu das Skriptum *Wurzeln*.