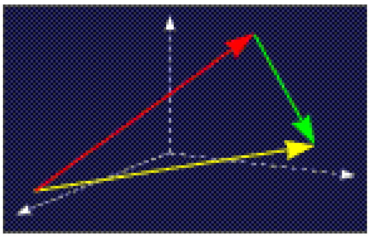
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Die Ordnung der reellen Zahlen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden die durch die Beziehungen „kleiner“, „größer“, „kleiner-gleich“ und „größer-gleich“ definierte Ordnung der reellen Zahlen und die Charakterisierung von Intervallen besprochen.

1 Kleiner und größer, kleiner-gleich und größer-gleich

Aus dem alltäglichen Umgang mit Zahlen ist uns vertraut, dass von zwei unterschiedlichen Zahlen immer eine die kleinere und die andere die größere ist. Ein Blick auf eine Skizze der Zahlengeraden (Abbildung 1) zeigt diese „Ordnung“ der Zahlen in geometrischer Darstellung.

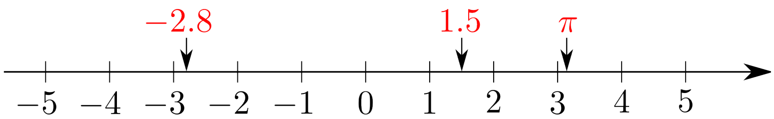


Abbildung 1: Skizze der Zahlengeraden mit einigen ausgewählten reellen Zahlenwerten.

Eine reelle Zahl ist kleiner (größer) als eine andere, wenn sie auf der Zahlengeraden weiter links (rechts) liegt als jene. Ist eine reelle Zahl x kleiner als eine andere reelle Zahl y, so schreiben wir dies in der Form $x < y$ an. Um auszudrücken, dass y größer als x ist, schreiben wir $y > x$. Beide Aussagen sind gleichwertig: $x < y$ gilt genau dann, wenn $y > x$ gilt (eine Aussage, die formal auch in der Form $x < y \iff y > x$ angeschrieben werden kann; das Symbol $\iff$ wird als „genau dann, wenn“ gelesen).

Beachten Sie, dass die Regel „kleiner = weiter links auf der Zahlengeraden“ auch für negative Zahlen gilt! So ist beispielsweise $-5 < -3$. Es ist ja auch $-5°\mathrm{C}$ eine niedrigere Temperatur als $-3°\mathrm{C}$, obwohl der Betrag[1] von -3 (also 3) kleiner als der Betrag von -5 (also 5) ist.

[1] Mehr über den Betrag reeller Zahlen lesen Sie im Skriptum *Absolutbetrag*.

Manchmal ist von einer reellen Zahl x nur bekannt (oder vorausgesetzt), dass sie *nicht größer* als eine Zahl y ist. Sie ist dann entweder kleiner oder gleich y. Dies schreiben wir in der Form $x \leq y$ („x kleiner-gleich y"). Ist hingegen von der Zahl x nur bekannt (oder vorausgesetzt), dass sie *nicht kleiner* als eine Zahl y ist, so ist x entweder größer oder gleich y. Dies schreiben wir in der Form $x \geq y$ („x größer-gleich y"). Beachten Sie, dass „$5 \leq 5$" eine wahre Aussage ist, während die Aussage „$5 < 5$" falsch ist. Die Aussagen $x \leq y$ und $y \geq x$ sind gleichwertig: $x \leq y \iff y \geq x$.

Gilt für zwei reelle Zahlen $x < y$, so gilt für ihre Gegenzahlen[2] $-x > -y$, d.h. eine analoge Beziehung, aber mit „umgedrehtem" Ordnungssymbol. Das lässt sich geometrisch dadurch verstehen, dass der Übergang von einer Zahl x zu ihrer Gegenzahl $-x$ auf der Zahlengeraden durch eine Spiegelung am Nullpunkt bewerkstelligt wird (und zwar gleichgültig, welches Vorzeichen x hat). Durch eine Spiegelung wird die Relation „liegt links von" in „liegt rechts von" umgewandelt (und umgekehrt). In analoger Weise folgt aus $x \leq y$, dass $-x \geq -y$ gilt.

2 Intervalle

Bei der Lösung mathematischer Problemstellungen kommt es oft vor, dass wir eine Zahl nicht genau kennen, aber von ihr wissen, dass sie in einem bestimmten Bereich der Menge $\mathbb{R}$ liegt, beispielsweise, dass sie größer als -3, aber kleiner als 5 ist. Von einer anderen Zahl könnten wir wissen, dass sie größer-gleich $-\frac{1}{2}$, aber kleiner als 1 ist. Derartige Teilmengen von $\mathbb{R}$ nennen wir **Intervalle**. Ein Intervall können wir uns als einen auf der Zahlengeraden liegenden, zusammenhängenden Bereich (also einen Bereich ohne „Lücken") vorstellen. Dabei unterscheiden wir verschiedene Typen von Intervallen. Ein Intervall heißt **beschränkt**, wenn es nicht bis ins Unendliche reicht, ansonsten heißt es **unbeschränkt**. Folgende vier Formen von beschränkten Intervallen sind möglich:

- Sind a und b reelle Zahlen und ist $a < b$, so bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind, als (beschränktes) **offenes** Intervall und schreiben es in der Form[3]

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \tag{2.1}$$

  an. Die Schreibweise $a < x < b$ ist ein Kürzel für „$a < x$ und $x < b$. So ist beispielsweise $(-3, 5)$ die Menge aller reellen Zahlen x, für die $-3 < x < 5$ gilt. Die Zahlen -3 und 5 (die untere und die obere Intervallgrenze) sind *keine* Elemente dieser Menge, wohl aber alle reellen Zahlen dazwischen.

  > Achtung: Im Intervall $(-3, 5)$ liegen nicht nur die ganzen Zahlen $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ und 4, sondern auch alle *nicht-ganzen* reellen Zahlen zwischen -3 und 5, also beispielsweise $-\frac{1}{7}$, 1.5 und π!

[2] Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ bezeichnen wir $-x$ als ihre Gegenzahl. -5 ist die Gegenzahl von 5, und 5 ist die Gegenzahl von -5. Die Zahl 0 ist ihre eigene Gegenzahl.

[3] Eine andere, ebenfalls gebräuchliche Schreibweise dafür ist $]a, b[$.

- Sind a und b reelle Zahlen und ist $a \le b$, so bezeichnen wir die Menge aller reellen Zahlen, die größer-gleich a und kleiner-gleich b sind, als (beschränktes) **abgeschlossenes** Intervall und schreiben es in der Form

$$[\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x \le b\} \tag{2.2}$$

an. So ist beispielsweise $[\,2, 8\,]$ die Menge aller reellen Zahlen x, für die $2 \le x \le 8$ gilt. Die Zahlen 2 und 8 (die untere und die obere Intervallgrenze) sind Elemente dieser Menge, und alle Zahlen dazwischen ebenfalls. Im Extremfall sind die Intervallgrenzen gleich – dann enthält das entsprechende Intervall (beispielsweise $[\,3, 3\,]$) nur eine einzige Zahl[4].

- Ein Intervall kann auch **halboffen** sein. Beschränkte halboffene Intervalle sind für $a < b$ von der Form

$$[\,a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x < b\} \tag{2.3}$$

oder

$$(a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \le b\}. \tag{2.4}$$

Beispielsweise ist $[-3, 6)$ die Menge aller reellen Zahlen x, für die $-3 \le x < 6$ gilt. -3 ist Element dieser Menge, 6 nicht, alle reellen Zahlen dazwischen aber schon. Und $(-\frac{1}{2}, \pi\,]$ ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die $-\frac{1}{2} < x \le \pi$ gilt. $-\frac{1}{2}$ ist kein Element dieser Menge, π und alle reellen Zahlen dazwischen aber schon.

Ob ein beschränktes Intervall offen, abgeschlossen oder halboffen ist, hängt nur davon ab, welche der Intervallgrenzen dazu genommen werden (charakterisiert durch ein $\le$) und welche nicht (charakterisiert durch ein $<$).

Beschränkte Intervalle können auf der Zahlengeraden dargestellt werden, wobei eine Intervallgrenze üblicherweise als voll ausgemalter Kreis gezeichnet wird, wenn sie zum Intervall gehört, und als offener Kreis, wenn sie nicht dazu gehört:

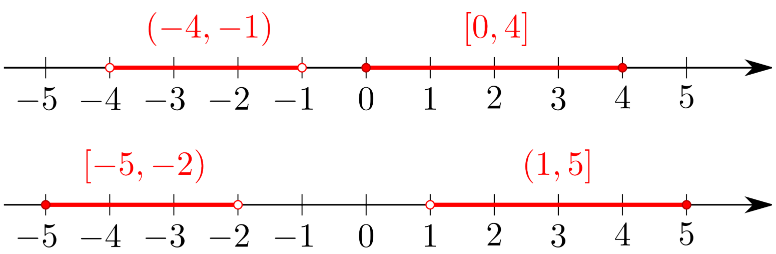


Abbildung 2: Vier beschränkte Intervalle: Das offene Intervall $(-4, -1)$, das abgeschlossene Intervall $[\,0, 4\,]$ und die halboffenen Intervalle $[-5, -2)$ und $(1, 5\,]$.

Ein beschränktes Intervall hat eine **Länge**. Sie kann aus einer Skizze abgelesen oder als Differenz „obere Grenze minus untere Grenze“ berechnet werden. Beispielsweise hat das Intervall $(-4, -1)$ die Länge 3, wie ein Blick auf Abbildung 2 oder die Rechnung $-1-(-4) = -1+4 = 3$ zeigt.

[4] Da es in gewisser Weise Geschmackssache ist, ob man so etwas noch als Intervall bezeichnen soll, heißt es „Punktintervall“ oder „entartetes Intervall“.

Neben den beschränkten Intervallen gibt es noch andere zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$, nämlich solche, die sich „bis ins Unendliche" erstrecken, die unbeschränkten Intervalle:

- Für jede reelle Zahl a legen wir folgende Bezeichnungen fest:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\} \tag{2.5}$$
$$(-\infty, a\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} \tag{2.6}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} \tag{2.7}$$
$$[\,a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} \tag{2.8}$$

Das hier verwendete Symbol ∞ steht in der Mathematik generell für „unendlich" und wird auch in anderen Zusammenhängen verwendet. Die Bedingung $a < x$ lässt sich natürlich auch als $x > a$ lesen und die Bedingung $a \leq x$ als $x \geq a$. Intervalle der Form $(-\infty, a)$ und (a, ∞) werden als offene Intervalle betrachtet, Intervalle der Form $(-\infty, a\,]$ und $[\,a, \infty)$ als abgeschlossene Intervalle[5]. Abbildung 3 zeigt anhand zweier Beispiele, wie man sich derartige Intervalle auf der Zahlengeraden vorstellen kann:

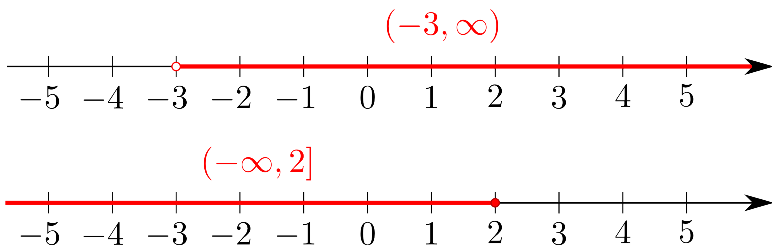


Abbildung 3: Zwei unbeschränkte Intervalle. $(-3, \infty)$ können wir genauer als ein *nach oben unbeschränktes* Intervall bezeichnen, $(-\infty, 2]$ als ein *nach unten unbeschränktes* Intervall. Das erste ist offen, das zweite abgeschlossen.

- Zwei Spezialfälle, die eigene Bezeichnungen bekommen, sind die Menge

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} \tag{2.9}$$

der positiven reellen Zahlen und die Menge

$$\mathbb{R}_0^+ = [\,0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} \tag{2.10}$$

der nichtnegativen reellen Zahlen.

- Schließlich kann die Menge $\mathbb{R}$ selbst als Intervall $(-\infty, \infty)$ aufgefasst werden.

[5] Hinter diesen Bezeichnungen steht ein Konzept, das über die Schulmathematik hinausgeht: Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ wird als offen bezeichnet, wenn es für jedes ihrer Elemente x ein beschränktes offenes Intervall gibt, das x als Element enthält und eine Teilmenge von M ist. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn ihr Komplement (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die *kein* Element von A sind) offen ist. Gemäß dieser Festlegung ist beispielsweise das Intervall $(-\infty, 3)$ offen, das Intervall $(-\infty, 3\,]$ jedoch abgeschlossen. Dass man für letzteres nicht $[-\infty, 3\,]$ schreibt, liegt daran, dass ∞ keine Zahl ist. Die leere Menge $\{\,\}$ und die Menge $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ sind in diesem Sinn sowohl offen als auch abgeschlossen.

Wie mit anderen Mengen auch, können mit Intervallen Durchschnitte und Vereinigungen gebildet werden. Dabei ist zu beachten:

- Wenn wir von einer reellen Zahl wissen, dass sie gleichzeitig in zwei (bekannten) Intervallen liegt, so bedeutet das: Sie liegt in der **Durchschnittsmenge** der beiden Intervalle. Die Durchschnittsmenge zweier Intervalle ist entweder leer oder wieder ein Intervall und kann entweder durch logisches Überlegen oder durch eine Skizze (oder beides) ermittelt werden. Beispielsweise ist $(-3,4)\cap[-2,5)$ die Menge aller reellen Zahlen x, für die sowohl $-3<x<4$ als auch $-2\le x<5$ gilt. Finden Sie heraus, um welches Intervall es sich handelt! Die Lösung ist:

$$(-3,4)\cap[-2,5)=[-2,4)$$

- Wenn wir von einer Zahl wissen, dass sie *zumindest* in *einem* von zwei (bekannten) Intervallen liegt, so bedeutet das: Sie liegt in der **Vereinigungsmenge** der beiden Intervalle. Die Vereinigungsmenge zweier Intervalle ist nicht notwendigerweise ein Intervall, denn sie muss nicht zusammenhängend sein. So besteht beispielsweise die Menge $(-4,-1)\cup[0,4]$ aus zwei getrennten Teilen – wie auch ein Blick auf Abbildung 2 zeigt, in der beide Intervalle $(-4,-1)$ und $[0,4]$ dargestellt sind.

Manchmal möchte man einer reellen Zahl x ein offenes Intervall als „Umgebung“ geben, die sich auf der Zahlengeraden von x aus gleich weit nach links und rechts erstreckt. Ein solches Intervall ist von der Form

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon), \tag{2.11}$$

wobei ε eine positive reelle Zahl ist. Von x aus reicht es eine Strecke ε nach links und eine Strecke ε nach rechts. Seine Länge ist 2ε.

Intervalle dienen in der Mathematik und ihren Anwendungen vielfältigen Zwecken. Sie können einen Unsicherheitsbereich angeben (d.h. einen Bereich, in dem eine Größe, deren genauen Wert wird nicht kennen, liegt), sie können einen Bereich angeben, in dem eine gewisse Größe (z.B. ein eingesetztes Kapital) liegen muss, um einen bestimmten Effekt zu erzielen, und sie treten als Lösungsmengen von Ungleichungen auf[6]. Weiters helfen sie uns, theoretische Konzepte, die mit dem Begriff des Unendlichen zusammenhängen, mathematisch präzise zu formulieren. Wenn es um das „unendlich Kleine“ geht, werden Intervalle der Form (2.11) benötigt, wobei ε zwar positiv ist, aber *beliebig* klein sein darf.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2023 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[6] Siehe dazu das Skriptum *Ungleichungen*.